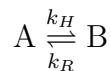


## Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Betrachten Sie die Kinetik der chemischen Reaktion zweier Substanzen A und B, die sich mit der Reaktionsgleichung



beschreiben lässt. Die zeitabhängigen Konzentrationen der einzelnen Stoffe  $c_A(t)$  und  $c_B(t)$  genügen dann dem Differentialgleichungssystem (DGL)

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= -k_H c_A + k_R c_B \\ \frac{dc_B}{dt} &= k_H c_A - k_R c_B \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGLs.  
(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für  $c_A(0) = c_0, c_B(0) = 0$ .  
(c) Betrachten Sie den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  für diese spezielle Lösung. Bestimmen Sie daraus die Gleichgewichtskonstante  $K$  der Reaktion.  
(d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für  $c_A(0) = c_0, c_B(0) = \frac{k_H}{k_R} c_0$ .
2. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren zu  $\mathbf{A}$ .  
(b) Geben Sie mit Hilfe der bisherigen Resultate eine unitäre Matrix  $\mathbf{U}$  an, so dass  $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$  eine Diagonalmatrix ist.
3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen mit  $x, y \in \mathbb{R}$  auf Stetigkeit.

(a)  $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$

(b)  $f(x, y) = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2 + y^2) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ \frac{\sin(x^n y)}{1 - e^{(x^2 + y^2)}} & \text{sonst} \end{cases}$

Betrachten Sie die Fälle  $n = 0, 1, 2$

### Zusatzaufgaben:

4. Gegeben sei die Matrix  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren Sie  $\mathbf{M}$  und geben Sie Eigenwerte und Transformationsmatrix an.

5. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1/4 \\ x^2 & -2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Für welche Werte von  $x$  kann aus den Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  keine Basis des  $\mathbb{R}^2$  gebildet werden?

6. Gegeben sei die Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Bestimmen Sie die Eigenwerte  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  von  $\mathbf{M}$ .
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  von  $\mathbf{M}$ .
- Bestimmen Sie eine Matrix  $\mathbf{U}$ , so dass  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$  mit  $\mathbf{D}$  diagonal gilt.
- Können Sie  $\mathbf{U}$  so bestimmen, dass  $\mathbf{U}$  unitär ist?
- Die Matrix  $\mathbf{M}$  lässt sich schreiben als  $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  hermitesch. Bestimmen Sie explizit ein mögliches  $\lambda$  sowie die Matrix  $\mathbf{A}$ .
- Zeigen Sie, dass alle Matrizen  $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A}$  hermitesch, mittels unitären Matrizen  $\mathbf{U}$  auf Diagonalform  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$  gebracht werden können.
- Sind die Eigenwerte einer solchen Matrix  $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}$  immer reell?