Übungen zur Vorlesung
Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Betrachten Sie die Kinetik der chemischen Reaktion zweier Substanzen A und B, die sich mit der Reaktionsgleichung

$$\mathrm{A} \underset{k_R}{\overset{k_H}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}$$

beschreiben lässt. Die zeitabhängigen Konzentrationen der einzelnen Stoffe $c_A(t)$ und $c_B(t)$ genügen dann dem Differentialgleichungssystem (DGL)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} &= -k_H c_A + k_R c_B \\ \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}t} &= k_H c_A - k_R c_B \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGLs.

   (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $c_A(0) = c_0, c_B(0) = 0$.

   (c) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ für diese spezielle Lösung. Bestimmen Sie daraus die Gleichgewichtskonstante K der Reaktion.

   (d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $c_A(0) = c_0, c_B(0) = \frac{k_H}{k_R} c_0$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren zu $\mathbf{A}$.

   (b) Geben Sie mit Hilfe der bisherigen Resultate eine unitäre Matrix $\mathbf{U}$ an, so dass $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ eine Diagonalmatrix ist.

3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen mit $x, y \in \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

   (a) $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2$

   (b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2 + y^2) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ \frac{\sin(x^n y)}{1 - e^{(x^2+y^2)}} & \text{sonst} \end{cases}$

   Betrachten Sie die Fälle $n = 0, 1, 2$

Zusatzaufgaben:

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Diagonalisieren Sie $\mathbf{M}$ und geben Sie Eigenwerte und Transformationsmatrix an.

5. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1/4 \\ x^2 & -2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

   Für welche Werte von x kann aus den Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ gebildet werden?

6. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ von $\mathbf{M}$.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von $\mathbf{M}$.

   (c) Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{U}$, so dass $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$ mit $\mathbf{D}$ diagonal gilt.

   (d) Können Sie $\mathbf{U}$ so bestimmen, dass $\mathbf{U}$ unitär ist?

   (e) Die Matrix $\mathbf{M}$ lässt sich schreiben als $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ hermitesch. Bestimmen Sie explizit ein mögliches λ sowie die Matrix $\mathbf{A}$.

   (f) Zeigen Sie, dass alle Matrizen $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}, \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{A}$ hermitesch, mittels unitären Matrizen $\mathbf{U}$ auf Diagonalform $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$ gebracht werden können.

   (g) Sind die Eigenwerte einer solchen Matrix $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{A}$ immer reell?