Theoretische Chemie
Prof. Dr. Uwe Manthe

Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1)$
   (b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 - x_3, x_1 + 4x_2, 2x_3 - |x_1|)$
   (c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2 + 2x_3, 4x_2 + 1)$
   (d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1 + 7x_2 - 5x_3$

2. Gibt es eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die die folgenden Vektoren $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^4$ jeweils auf die angegebenen Vektoren $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ abbilden (begründen Sie Ihre Antwort):

   (a) $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,1), \quad \mathbf{a}_2 = (0,1,1,1), \quad \mathbf{a}_3 = (1,1,1,0), \quad \mathbf{a}_4 = (1,1,0,1)$
   $\mathbf{b}_1 = (0,1,2), \quad \mathbf{b}_2 = (1,0,2), \quad \mathbf{b}_3 = (1,2,0), \quad \mathbf{b}_4 = (0,0,7)$
   (b) $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,1), \quad \mathbf{a}_2 = (0,1,1,1), \quad \mathbf{a}_3 = (-1,1,0,0)$
   $\mathbf{b}_1 = (0,1,2), \quad \mathbf{b}_2 = (1,0,2), \quad \mathbf{b}_3 = (1,2,0)$
   (c) $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,1), \quad \mathbf{a}_2 = (0,1,1,1), \quad \mathbf{a}_3 = (-1,1,0,0)$
   $\mathbf{b}_1 = (0,1,2), \quad \mathbf{b}_2 = (1,2,0), \quad \mathbf{b}_3 = (1,1,-2)$

3. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C_4} = (1,-1,1).$$

   Bestimmen Sie für $n, m \in \{1, \ldots, 4\}$ alle die Produkte $\mathbf{C_n} \cdot \mathbf{C_m}$, die überhaupt definiert sind.

4. Seien a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b, $c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{A}$ bis $\mathbf{E}$ reelle 2×2 Matrizen mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -b \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -b & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$,

(b) $\mathbf{B}^2+2\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{C}^2-(\mathbf{B}+\mathbf{C})^2$ und

(c) $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2-(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

5. Berechnen Sie folgende Determinanten, wobei $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{C}$:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 10 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & (b+c) \\ 1 & b & (c+a) \\ 1 & c & (a+b) \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 1 \end{vmatrix}$

Zusatzaufgaben:

6. Sei $\ell:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$ die durch

$$\begin{array}{lcllcl} (1,2,-3,-2) & \mapsto & (2,-1,1,3), & (-2,-3,8,7) & \mapsto & (-4,1,-1,0) \\ (-2,-5,5,3) & \mapsto & (2,-1,1,-1), & (4,12,-7,-1) & \mapsto & (0,2,3,-3) \end{array}$$

gegebene lineare Abbildung. Berechnen Sie den Bildvektor von $\mathbf{b}=(1,1,1,1)$.

7. Gegeben seien die reellen Matrizen:

$$\mathbf{C_1}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \pi & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C_2}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C_3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C_4}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für $n,m\in\{1,\ldots,4\}$ alle die Produkte $\mathbf{C_n}\cdot\mathbf{C_m}$, die überhaupt definiert sind.

8. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4a & 1 & 0 \\ 1 & 3a & 2 \\ 0 & 2a & 5 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2b & -8b \\ -2b & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2c \\ c & c & 2 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & d & 5 \\ 1 & -3 & -d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} - (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{D}$ und

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.