

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- (a)  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1)$
- (b)  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 - x_3, x_1 + 4x_2, 2x_3 - |x_1|)$
- (c)  $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2 + 2x_3, 4x_2 + 1)$
- (d)  $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1 + 7x_2 - 5x_3$

2. Gibt es eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die die folgenden Vektoren  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^4$  jeweils auf die angegebenen Vektoren  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$  abbilden (begründen Sie Ihre Antwort):

- (a)  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{a}_4 = (1, 1, 0, 1)$   
 $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{b}_4 = (0, 0, 7)$
- (b)  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 0, 0)$   
 $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 2, 0)$
- (c)  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 0, 0)$   
 $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, -2)$

3. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_4 = (1, -1, 1).$$

Bestimmen Sie für  $n, m \in \{1, \dots, 4\}$  alle die Produkte  $\mathbf{C}_n \cdot \mathbf{C}_m$ , die überhaupt definiert sind.

4. Seien  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b, c \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{A}$  bis  $\mathbf{E}$  reelle  $2 \times 2$  Matrizen mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -b \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -b & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ ,
- (b)  $\mathbf{B}^2 + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 - (\mathbf{B} + \mathbf{C})^2$  und
- (c)  $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2$ .

### Zusatzaufgaben:

6. Sei  $\ell : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  die durch

$$\begin{aligned}(1, 2, -3, -2) &\mapsto (2, -1, 1, 3), & (-2, -3, 8, 7) &\mapsto (-4, 1, -1, 0) \\ (-2, -5, 5, 3) &\mapsto (2, -1, 1, -1), & (4, 12, -7, -1) &\mapsto (0, 2, 3, -3)\end{aligned}$$

gegebene lineare Abbildung. Berechnen Sie den Bildvektor von  $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)$ .

7. Gegeben seien die reellen Matrizen:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \pi & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für  $n, m \in \{1, \dots, 4\}$  alle die Produkte  $\mathbf{C}_n \cdot \mathbf{C}_m$ , die überhaupt definiert sind.

8. Gegeben seien die Matrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 4a & 1 & 0 \\ 1 & 3a & 2 \\ 0 & 2a & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & -8b \\ -2b & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2c \\ c & c & 2 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & d & 5 \\ 1 & -3 & -d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Berechnen Sie

- (a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}$  und
- (b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 - (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .