

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Die Menge der Funktionen

$$V = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}; f(x) = c_1 + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x); c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}.$$

bildet mit der punktweisen Addition von Funktionen und der punktweisen skalaren Multiplikation einen Vektorraum. Durch  $\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^* g(x)$  ist ein Skalarprodukt auf  $V$  gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktionen  $g_1, g_2, g_3 \in V$  mit

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = (\sin(x) - i \cos(x)), \quad g_3(x) = e^{-ix}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

orthogonal sind und normieren Sie diese.

2. Gegeben sei die Menge  $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$  der komplexen Polynome vom Grad  $\leq n$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q} \rangle := \int_{-1}^1 p(x)^* q(x) dx$  für alle  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}[X]_{\leq n}$  die Eigenschaften eines Skalarproduktes besitzt.
- (b) Für  $n = 2$  bilden die Funktionen  $\{1, x, x^2\}$  eine Basis. Erzeugen Sie daraus mittels Gram-Schmidt Orthonormierung unter Verwendung des Skalarproduktes aus a) eine orthonormale Basis.

3. Gegeben seien die Vektoren  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Wie groß ist die Fläche  $F$  des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms?

4. Welche der folgenden Determinanten sind gleich Null?

(a)  $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(c)  $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Zusatzaufgaben:**

5. Sei  $\mathcal{L}_{[0,2\pi]}^2$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , für die gilt, dass

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

also dass sie *quadratintegrabel* sind. Auf diesem Raum ist

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)^* g(t) dt$$

ein Skalarprodukt. Sei  $l \in \mathbb{N}$  und für  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$  sei

$$f_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Zeigen Sie, dass die  $f_m$  orthonormal zueinander sind.