Übungen zur Vorlesung
Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4} \in \mathbb{R}^4$ mit
$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$ eine Basis vom Vektorraum $\mathbb{R}^4$ ist.
   (b) Stellen Sie den Vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ in dieser Basis dar.

2. Es sei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller reellen Polynome p mit $p''' = 0$.
   (a) Geben Sie eine möglichst einfache Basis für $\mathbb{R}[x]$ an.
   (b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(x) = x^2 + x + 2$, $p_2(x) = 3x^2 + 2x + 6$ und $p_3(x) = x - 1$ linear unabhängig sind. Bildet $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis vom $\mathbb{R}[x]$?
   (c) Stellen Sie das Polynom $q(x) = x$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

3. Die Funktionen f_1, f_2, f_3 seien gegeben durch
$$f_1(x) := \sin(x), \qquad f_2(x) := \sin(2x), \qquad f_3(x) := (1 + \cos(x))\sin(x).$$
   Bestimmen Sie eine Basis von $L(f_1, f_2, f_3) := \{\sum_{j=1}^{3} c_j\, f_j \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$.

4. Seien $(a, b)^T, (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(a, b)^T, (x, y)^T$ genau dann linear abhängig sind, wenn $ay - bx = 0$ ist.

Zusatzaufgaben:

5. Sei $t \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ mit
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$
   Untersuchen Sie, für welche Werte von t diese Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig sind.

6. Zeigen Sie, dass das Tupel $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

7. Sind die Funktionen $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ für $x \in \mathbb{R}$ linear unabhängig?