

Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Betrachten Sie die kommutative Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$. Hierauf erklärt man die komponentenweise Multiplikation \odot gemäß:

$$\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ kein Körper ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$.

$$\mathbb{R}[X]_{\leq n} := \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i \mid \alpha_n, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ ein Vektorraum ist.
(b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome vom Maximalgrad 2 einen Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ bildet.

3. Welche der folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^3 sind Untervektorräume:

- (a) $\{(x, y, z)^T \mid z > 0\}$,
(b) $\{(x, y, z)^T \mid x + y + z = 1\}$,
(c) $\{(x, y, z)^T \mid x + z = 0\}$.

4. Es sei $\mathcal{L}^p[x]$ die Menge aller Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_i(x)$, für die gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_i(x)|^p dx < \infty.$$

Ist $\mathcal{L}^1[x]$ ein Vektorraum?

Zusatzaufgaben:

5. Betrachten Sie die kommutative Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$. Hierauf erklärt man die Multiplikation \odot gemäß:

$$\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Ist $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ bezüglich dieser Verknüpfungen ein Körper?

6. Ist $\mathcal{L}^2[x]$, wie in Aufgabe 4 definiert, ein Vektorraum?

Bonus: Ist $\mathcal{L}^p[x]$, $p \in \mathbb{N}$ ein Vektorraum? Tipp: $|f+g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \quad \forall f, g \in \mathbb{R}$ (warum?)