II. Analysis im Mehrdimensionalen

1. Motivation

Mathe I: Analysis eindimensionaler Funktionen $f(x)$

$\rightarrow$ Ableitung $\frac{df}{dx}$, Integral $\int dx\, f(x)$

Teil I dieser Vorlesung: lineare Funktionen (Abbildungen) mehrerer Variablen

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{f}(\underline{x})$$

mit $f_i(\underline{x}) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Jetzt: Allgemeine (nichtlineare) Funktionen mehrerer Variablen, z.B. Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, oder $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.

$\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ oder $y = f(\underline{x})$ abhängig vom gewählten Bildraum.

Übertragung der Konzepte der eindimensionalen Analysis ins Mehrdimensionale.

Naiver erster Versuch:
Bei Differentation und Integration werden die nicht betroffenen Variablen einfach als Parameter betrachtet

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \tilde{f}(x_1; x_2, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx_1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{d\tilde{f}(x_1; x_2, \dots, x_n)}{dx_1}$$

$$\int dx_1\, f(x_1, \dots, x_n) = \int dx_1\, \tilde{f}(x_1; x_2, \dots x_n)$$

Dieser Zugang enthält viele Elemente, die sich auch in einem weiteren, besseren Bild ergeben werden, kann jedoch wichtige Fragen nicht beantworten, z. B.

- ist die Reihenfolge von Differentation und Integration nach verschiedenen Variablen vertauschbar?

$$\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2} f \overset{?}{=} \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dx_1} f$$

$$\int dx_1 \int dx_2\, f \overset{?}{=} \int dx_2 \int dx_1\, f$$

klar erkennbar sind die Defizite dieses naiven Zugangs insbesondere bei der Frage der Stetigkeit.

Beispiel: Zweidimensionale Funktion

$$f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

1.) Betrachte y als Parameter:

$\tilde{f}(x;y) = f(x,y)$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}(x;y)$ stetig für $y \neq 0$, da der Nenner immer größer 0.

$\tilde{f}(x;0) = \frac{0}{x^2}$ stetig für $x \neq 0$

und stetig ergänzbar durch

$\tilde{f}(x;0) = 0$ in $x = 0$.

2.) Betrachte x als Parameter

$\rightarrow$ analoges Ergebnis

Vermutung: $f(x,y)$ stetig für $x,y \neq 0$ und stetig ergänzbar durch $f(0,0) = 0$ in $x,y = 0$.

3.) Wähle nun $y = \lambda \cdot x$:

$$\tilde{\tilde{f}}(x;\lambda) = f(x, \lambda \cdot x) = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2}$$

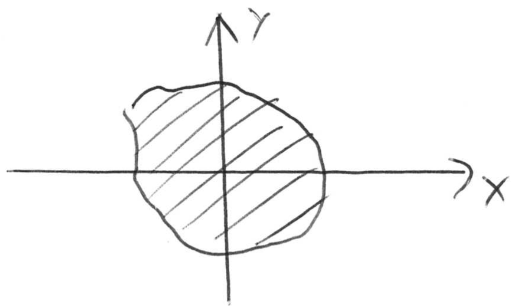
$\Rightarrow$ $\tilde{\tilde{f}}(x;\lambda)$ stetig ergänzbar durch

$\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ in $x = 0$.

Dies Überlegung würde also zur stetigen Ergänzung $f(0,0) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ führen. Widerspruch zu oben!

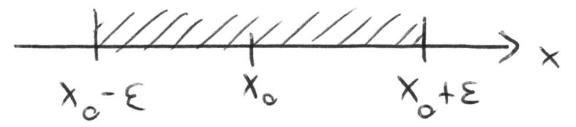
Problem:

Die naive Überlegung betrachtet nur Schnitte durch ein Gebiet

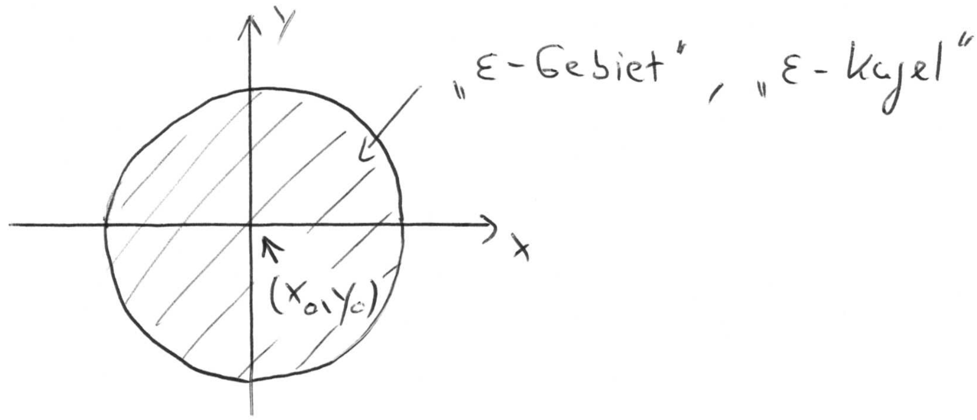


entlang der x und y-Achse. Notwendig ist allerdings die Betrachtung der Annäherung an $x = y = 0$ aus allen möglichen Richtungen.

Der für die Analysis im Eindimensionalen zentrale Begriff der ε-Umgebung



muß also jetzt durch einen entsprechenden Gebietsbegriff ersetzt werden.



Entsprechend müssen Abstände zwischen Zahlen $|x - x_0|$ durch Abstände zwischen Vektoren $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$ ersetzt werden.

Dies ist möglich, wenn die Vektoren Elemente eines <u>normierten Raumes</u>, d.h. eines Vektorraums mit Norm, sind.

Anmerkung: Die normalen Zahlenräume $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind bezüglich der durch den Betrag $|z|$ gegebenen Norm normierte Räume

2. Grenzwerte

Definition

V sei ein normierter Raum und $\underline{u}_n$ eine Folge in V. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $\underline{u} \in \mathbb{V}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\| \underline{u}_n - \underline{u} \| < \varepsilon \quad \text{für jedes } n > N(\varepsilon).$$

Dies ist die Erweiterung der normalen Folgenkonvergenz ins Mehrdimensionale. Eine schwächere Konvergenzdefinition läßt sich geben. Sie führt zu Cauchy-Folgen:

Definition

V sei ein normierter Raum und $\underline{u}_n$ eine Folge in V. Sie heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\| \underline{u}_n - \underline{u}_m \| < \varepsilon \quad \text{für jedes } n, m > N(\varepsilon)$$

Abhängig von der Wahl von V muß eine Cauchy-Folge nicht unbedingt gegen einen Grenzwert konvergieren.

Beispiel: Betrachte $\mathbb{V} = \mathbb{Q}$

Die Folge $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ ist wegen $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ eine Cauchy-Folge, wegen $e \notin \mathbb{Q}$ hat sie aber keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

→ Interpretation: $\mathbb{Q}$ ist irgendwie eine „unvollständige" Menge. Sie hat „Löcher".

Im folgenden ist es sinnvoll, nur „vollständige" Mengen ohne solche Löcher zu betrachten.

Definition

Eine Teilmenge $\mathbb{M}$ eines normierten Raums heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-Folge aus $\mathbb{M}$ einen Grenzwert, der Element aus $\mathbb{M}$ ist, besitzt.

Anmerkung: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig, ebenso alle $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

Vollständige Mengen von Vektoren können also als die mehrdimensionale Verallgemeinerung von Intervallen aus $\mathbb{R}$, $[a,b]$, $[a,\infty[$, $]-\infty,b]$ oder $]-\infty,\infty[$, betrachtet Werten.

Bezeichnungen:

Ein vollständiger normierter Raum heißt <u>Banach-Raum</u>.

Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt <u>Hilbert-Raum</u>.

Jetzt können Grenzwerte von Funktionen eingeführt werden.

<u>Definition</u>

Sei V ein normierter Raum und $\mathbb{M}$ eine vollständige Teilmenge von $\mathbb{V}$. Die Funktion $f(\underline{v})$ bilde jedes $\underline{v} \in \mathbb{M}$ in einen Banach-Raum ab. Dann existiert der Grenzwert $u_0 = \lim\limits_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v})$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$\| f(\underline{v}) - u_0 \| < \varepsilon \quad \text{für } \|v - v_0\| < \delta(\varepsilon).$$

Eine äquivalente andere Definition ist (analog zur Situation bei Funktionen einer reelen Variablen)

<u>Definition</u>

Sei V ein normierter Raum und $\mathbb{M}$ eine vollständige Teilmenge von $\mathbb{V}$. Die Funktion $f(\underline{v})$ bilde jedes $\underline{v} \in \mathbb{M}$ in einen Banach-Raum ab. Dann existiert der Grenzwert $u_0 = \lim\limits_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v})$, wenn für jede Folge $\underline{v}_n$ in M mit $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{v}_n = \underline{v}_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\underline{v}_n) = u_0$.

Die Definition der Stetigkeit folgt dann unmittbar:

<u>Definition</u>

(Voraussetzungen wie oben)

Eine Funktion heißt <u>stetig</u> in $\underline{v}_0 \in M$, wenn

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v}) = f(\underline{v}_0).$$

Sie heißt <u>stetig auf M</u>, wenn sie in jedem $v \in \mathbb{M}$ stetig ist.

Mit diesen Definitionen lassen sich nun alle einschlägigen Sätze bezüglich Grenzwerten und Stetigkeit, die für Funktionen einer reellen Variable gelten, analog für Funktionen mehrerer Variabler herleiten. z.B.:

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} (c \cdot f(\underline{v})) = c \cdot \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v})$$

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} (f(\underline{v}) + g(\underline{v})) = \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v}) + \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} g(\underline{v})$$

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} (f(\underline{v}) \cdot g(\underline{v})) = \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v}) \cdot \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} g(\underline{v})$$

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} \frac{f(\underline{v})}{g(\underline{v})} = \frac{\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(\underline{v})}{\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} g(\underline{v})} \quad \text{für } \left\| \lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} g(v) \right\| \neq 0$$

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{v}_0} f(g(\underline{v})) = f(g(\underline{v}_0)) \quad \text{für } f, g \text{ stetig}$$

Anmerkung:
In der eindimensionalen Analysis hatten wir uns auf Funktionen reeler Variabler beschränkt, die neuen, erweiterten Grenzwertdefinitionen ermöglich jetzt auch die Betrachtung von Funktionen komplexer Variabler.

3. Partielle Ableitung

Ableitung nach einer Variablen bei festgehaltenem Wert der anderen (siehe Motivation) $\Rightarrow$

Definition

Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist in $\underline{x}$ partiell differenzierbar nach x_k, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man dann als partielle Ableitung von f nach x_k an der Stelle $\underline{x}$ und schreibt ihn als

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}} .$$

Anmerkung: Hier und im folgenden wird zur Vereinfachung auf eine explizite Angabe von Wertebereich (Teilmenge eines Banachraums) und Definitionsbereich (muß mindestens eine offene Kugel $\{\underline{y} \mid \|\underline{y} - \underline{x}\| < r\}$ mit Radius $r > 0$ um $\underline{x}$ umfassen) verzichtet.

Offensichtlich gelten dann für partielle Ableitungen die „normalen" Ableitungsregeln:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\alpha \cdot f(\underline{x})\right) = \alpha \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(\underline{x}) + g(\underline{x})\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}} + \left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})\right) = f(\underline{x}) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}} + g(\underline{x}) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}} \cdot g(\underline{x}) - f(\underline{x}) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}}}{g(\underline{x})^2}$$

Verkettet man die Funktion $y = h(x)$, die nur von einer Variable x abhängt, mit einer Funktion $f(\underline{x})$, die von mehreren Variablen abhängt, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} h\left(f(\underline{x})\right) = h'\left(f(\underline{x})\right) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}}$$

Verkettungen des Typs $f(\underline{g}(\underline{x}))$ mit vektorwertigen Funktionen $\underline{g}(\underline{x})$ erfordern eine kompliziertere Behandlung.

Anmerkung:

Explizit soll jetzt der zweidimensionale Fall $f(u_1(t), u_2(t))$ betrachtet werden:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u_1(t+h), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t))}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(u_1(t+h), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t+h))}{h} + \frac{f(u_1(t), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t))}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(u_1(t+h), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t+h))}{u_1(t+h) - u_1(t)} \right) \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{u_1(t+h) - u_1(t)}{h} \right) +$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(u_1(t), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t))}{u_2(t+h) - u_2(t)} \right) \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{u_2(t+h) - u_2(t)}{h} \right)$$

(sofern alle 4 Grenzwerte existieren)

Wegen $u_1(t+h) - u_1(t) \to 0$ für $h \to 0$ gilt:

$$\lim_{h' \to 0} \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(u_1(t+h), u_2(t+h')) - f(u_1(t), u_2(t+h'))}{u_1(t+h) - u_1(t)} \right) =$$

$$\lim_{h' \to 0} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t+h') \end{pmatrix}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}}$$

Hier wird die Stetigkeit der partiellen Ableitung benötigt.

Insgesamt folgt dann:

$$\frac{d\, f(u_1(t), u_2(t))}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_1(t+h), u_2(t+h)) - f(u_1(t), u_2(t))}{h} =$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\underline{u}(t)} \cdot \frac{du_1}{dt} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\underline{u}(t)} \cdot \frac{du_2}{dt}$$

Die Erweiterung dieser Herleitung ins Höherdimensionale ist dann offensichtlich:

$$\frac{d}{dt} f(\underline{u}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{u}(t)} \cdot \frac{du_i}{dt}$$

Die Erweiterung auf den Fall $f(\underline{g}(\underline{y}))$ erfolgt dann analog:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f(\underline{g}(\underline{y})) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{g}(\underline{y})} \cdot \left.\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right|_{\underline{y}}$$

Voraussetzungen:
$f(\underline{x})$ partiell differenzierbar mit stetiger partieller Ableitung,
$u_i(t)$ differenzierbar,
$g_i(\underline{y})$ partiell differenzierbar nach y_j

Anmerkung:
$f(\underline{x})$ partiell differenzierbar meint, daß $f(\underline{x})$ nach allen x_i partiell differenzierbar ist.

Den Vektor der partiellen Ableitung bezeichnet man auch als <u>Gradient</u> der Funktion und schreibt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla}}}{\underline{\nabla}} f = \text{grad}(f)$$

Höhere partielle Ableitungen kann man jetzt offensichtlich analog einführen. Speziell bezeichnet man die Matrix der zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

als <u>Hesse-Matrix</u>. Sie spielt bei der Betrachtung von Minima, Maxima und Sattelpunkten von $f(\underline{x})$ eine zentrale Rolle.

Satz

Existieren die entsprechenden partiellen Ableitungen und sind stetig, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Beweis:

Herleitung für den 2D-Fall ausreichend.

Für $f = f(x,y)$ zu zeigen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Notwendig für den Beweis: Mittelwertsatz

Ist $F(x)$ in $[x, x+h]$ differenzierbar, so existiert ein $\vartheta \in \,]0,1[$, so daß

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot F'(x + \vartheta \cdot h)$$

Also:

$$\left(f(x+h,y+h)-f(x+h,y)\right)-\left(f(x,y+h)-f(x,y)\right)=$$

$$h\cdot\left(\partial_x f(x+\vartheta_x\cdot h,y+h)-\partial_x f(x+\vartheta_x h,y)\right)=$$

$$h^2\cdot\partial_y\partial_x f(x+\vartheta_x\cdot h,y+\vartheta_y h)$$

mit $\vartheta_x,\vartheta_y\in\,]0,1[$

Analog:

$$\left(f(x+h,y+h)-f(x,y+h)\right)-\left(f(x+h,y)\;\;f(x,y)\right)=$$

$$h\cdot\left(\partial_y f(x+h,y+\vartheta_y' h)-\partial_y f(x,y+\vartheta_y' h)\right)=$$

$$h^2\cdot\partial_x\partial_y f(x+\vartheta_x' h,y+\vartheta_y' h)$$

mit $\vartheta_x',\vartheta_y'\in\,]0,1[$

Aufgrund der Gleichheit der beiden linken Seiten gilt:

$$h^2\,\partial_y\partial_x f(x+\vartheta_x h,y+\vartheta_y h)=h^2\,\partial_x\partial_y f(x+\vartheta_x' h,y+\vartheta_y' h)$$

$$\Rightarrow\partial_y\partial_x f(x+\vartheta_x h,y+\vartheta_y h)=\partial_x\partial_y(x+\vartheta_x' h,y+\vartheta_y' h)$$

Durch Grenzwertbildung $h\to 0$ folgt:

$$\partial_y\partial_x f(x,y)=\partial_x\partial_y f(x,y)$$

4. Totales Differential

In Abschnitt II.1 hatten wir gesehen, daß die mögliche Annäherung an einen Punkt $\underline{x}$ aus vielen Richtungen möglich ist. Dies ist ein zentrales Element der mehrdimensionalen Analysis. Diese Idee führt zum Begriff der Richtungsableitung.

Definition

Die Zahl

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{h}) - f(\underline{x})}{t \cdot \|\underline{h}\|} = D_{\underline{h}} f(\underline{x})$$

bezeichnet man als <u>Richtungsableitung</u> der Funktion $f(\underline{x})$ an der Stelle $\underline{x}$ in Richtung $\underline{h}$.

Es gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{h}) - f(\underline{x})}{t} = \frac{d}{dy}\left(f(\underline{x} + y \cdot \underline{h})\right)\Big|_{y=0} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\underline{x} + y \cdot \underline{h}} \cdot \frac{d(x_i + y \cdot h_i)}{dy}\right)\Big|_{y=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\underline{x}} \cdot h_i$$

Existieren stetige partielle Ableitungen, so ist die Richtungsableitung

$$D_{\underline{h}}\, f(\underline{x}) = \frac{\langle \underline{h} \mid \operatorname{grad}(f(\underline{x}))\rangle}{\|\underline{h}\|} .$$

Dies führt zu einem Differenzierbarkeitsbegriff, der stärker als die partielle Differenzierbarkeit ist.

Definition

Die Funktion $f(\underline{x})$ heißt in $\underline{x}$ differenzierbar oder total differenzierbar, wenn

$$\lim_{\underline{h} \to 0} \left(\frac{f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x})}{\|h\|} - D_{\underline{h}}(f(\underline{x})) \right) = 0 .$$

Total differenzierbare Funktionen sind partiell differenzierbar.
Man schreibt das totale Differential

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

Satz

Besitzt eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ an $\underline{x}$ stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, so ist sie an $\underline{x}$ <u>total differenzierbar</u>.

Beweis:

stetige partielle Ableitungen

$\Rightarrow$ $D_{\underline{h}} f(\underline{x})$ existiert für beliebiges $\underline{h}$ und ist stetig.

Betrachte nun: $F(t) = f(\underline{x} + t \cdot \underline{h})$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \| \underline{h} \| \cdot D_{\underline{h}} f(\underline{x} + t \cdot \underline{h})$$

Mittelwertsatz $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + t \cdot \underline{h}) - f(\underline{x}) &= F(t) - F(0) \\ &= t \cdot F'(\vartheta \cdot t) \\ &\quad \text{mit } \vartheta \in]0,1[\end{aligned}$$

Wähle $t = 1$:

$$\frac{f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x})}{\| \underline{h} \|} = \frac{F'(\vartheta)}{\| \underline{h} \|} = D_h f(\underline{x} + \vartheta \cdot \underline{h})$$

Grenzwertbildung $h \to 0$ zeigt die totale Differenzierbarkeit

5. Taylorreihe und stationäre Punkte

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe → Taylorentwicklung

Im Eindimensionalen:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left.\frac{d^m f}{dx^m}\right|_{x_0} \cdot h^m$$

Im n-dimensionalen:

Herleitung aus dem Eindimensionalen durch Betrachtung der Funktion

$$F(\vartheta) = f(\underline{x}_0 + \vartheta \cdot \underline{h})$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = F(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left.\frac{d^m F}{d\vartheta^m}\right|_{\vartheta=0}$$

$$\frac{dF}{d\vartheta} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}_0 + \vartheta \cdot \underline{h}} \cdot h_i$$

$$\frac{d^2F}{d\vartheta^2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{\underline{x}_0 + \vartheta \cdot \underline{h}} \cdot h_j \cdot h_i$$

$$\frac{d^m F}{d\vartheta^m} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \left.\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}\right|_{\underline{x}_0+\vartheta\cdot\underline{h}} \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdots h_{i_m}$$

Also:

$$f(\underline{x}_0 + h) = f(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}_0} \cdot h_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\underline{x}_0} \cdot h_i \cdot h_j + \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \left.\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right|_{x_0} \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdots h_{i_m}$$

<u>Taylorentwicklung im n-dimensionalen</u>

Mit Hilfe der Taylorreihe kann man nun einfache stationäre Punkte, also Minima, Maxima und Sattelpunkte, mehrdimensionaler Funktionen untersuchen.

Stationäre Punkte im Mehrdimensionalen:

$\underline{x}_0$ stationärer Punkt $\Rightarrow$ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}_0} = 0$

Taylorentwicklung um $\underline{x}_0$:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\underline{x}_0} h_i \cdot h_j \cancel{+ \ldots}$$

Vernachlässigung höherer Terme bei Betrachtung einer kleinen Umgebung um $\underline{x}_0$

Hesse-Matrix $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0}$ entscheidet über den Typ der stationären Punktes: Minimum, Maximum oder Sattelpunkt

Hesse-Matrix ist reell symmetrisch
→ diagonalisierbar mit unitärer Eigenvektormatrix $\underline{\underline{U}}$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0} = \left(\underline{\underline{U}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{U}}^+\right)_{ij}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} u_{im} \lambda_m u^+_{mj}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} u_{im} \lambda_m u^*_{jm}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j u_{im} \lambda_m u^*_{jm} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} \lambda_m \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i u_{im}\right)}_{\tilde{h}_m} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} h_j u^*_{jm}\right)}_{\tilde{h}^*_m} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} \lambda_m \cdot |\tilde{h}_m|^2$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m |\tilde{h}_m|^2$$

Sind alle Eigenwerte der Hessematrix

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\underline{x}_0}$$ größer als Null,

so ist $\underline{x}_0$ ein <u>relatives Minimum</u>:

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m |\tilde{h}_m|^2 > 0$$

für $\underline{h} \neq 0$ und $\underline{h}$ klein.

Sind alle Eigenwerte kleiner Null, so ist $\underline{x}_0$ ein <u>relatives Maximum</u>:

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_n |\tilde{h}_m|^2 < 0$$

Sind die Eigenwerte teils kleiner, teils größer als Null, so ist $\underline{x}_0$ ein <u>Sattelpunkt</u>.

Eigenwerte $\lambda_m = 0$ erfordern eine gesonderte Betrachtung $\rightarrow$ vgl. Vorzeichenwechselkriterium.

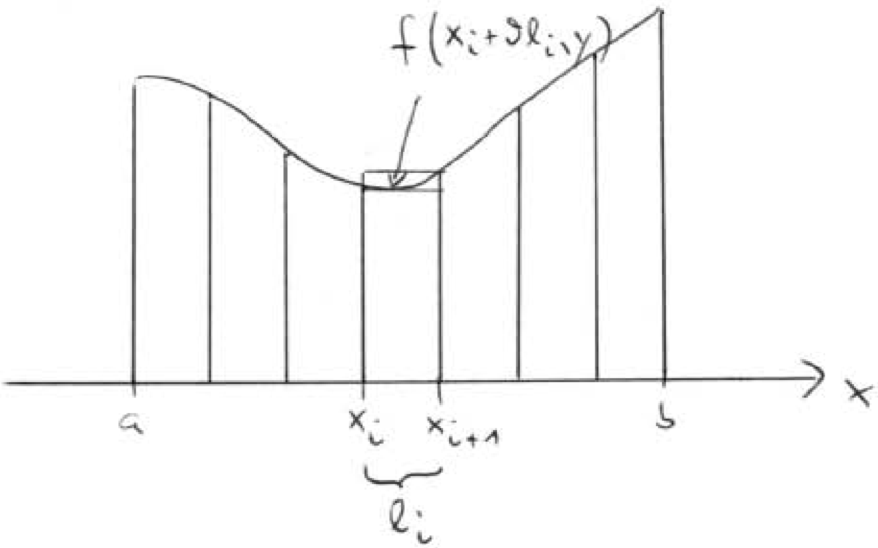
<u>Definition</u>

Sind alle Eigenwerte einer Matrix größer bzw. größergleich Null, so nennt man diese <u>positiv definit</u> bzw. <u>semidefinit</u>.

6. Integration im Mehrdimensionalen

Idee: Rückführung der mehrdimensionalen Integration auf eindimensionale (analog zur partiellen Differentation bei der Differentialrechnung)

Riemann - Integral:



Integral als Reihe:

Eindimensional: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} l_i\, f(x_i + \vartheta_i l_i)$

$\vartheta_i \in [0,1]$

Zweidimensional (oder analog allgemein Mehrdimensional): y als Parameter

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} l_i\, f(x_i + \vartheta_i l_i, y)$$

Für stetige Funktionen $f(x,y)$
(Stetigkeit im Mehrdimensionalen!)
ist die Reihe betrachtet als
Funktionsreihe y,

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} g_i(y)$$

mit $g_i(y) = l_i \cdot f(x_i + \vartheta_i l_i, y)$,
gleichmäßig konvergent.

Wiederholung:

Definition:
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ **konvergiert gleichmäßig** für $x \in D$, wenn es für alle $x \in D$ zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ ein (nicht von x abhängiges) N gibt, so daß

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\right| < \epsilon \quad \text{für} \quad n > N = N(\epsilon).$$

Während einfache Konvergenz die Existenz eines $N(\epsilon, x)$ erfordert, benötigt man für gleichmäßige Konvergenz die Existenz eines x-unabhängigen $N(\epsilon)$.

$\sum_{i=1}^{N} g_i(y)$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$

$$\lim_{y\to y_0} \sum_{i=1}^{N} g_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \lim_{y\to y_0} g_i(y) = \sum_{i=1}^{N} g(y_0)$$

$$\int_c^d dy \sum_{i=1}^{N} g_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \int_c^d dy\, g_i(y)$$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_i}{\partial y}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{N} g_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y} g_i(y)$$

Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Riemann-Summe:

Wähle $\vartheta_i^{(max)}, \vartheta_i^{(min)} \in [0,1)$ so, daß für jedes $\vartheta \in [0,1]$ gilt:

$$f(x_i + \vartheta_i^{(max)} l_i, y) \geq f(x_i + \vartheta l_i, y) \geq f(x_i + \vartheta_i^{(min)} l_i, y)$$

Für beliebige $\vartheta_i \in [0,1]$ gilt dann:

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i + \vartheta_i l_i, y) \right) - \int_a^b f(x,y)dx \right| \leq$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i + \vartheta_i l_i, y) - \sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i + \vartheta_i^{(min)} l_i, y) \right| \leq$$

(die Untersumme schätzt das Integral nach unten ab)

$$\left| \sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i + \vartheta_i^{(max)} l_i, y) - \sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i + \vartheta_i^{(min)} l_i, y) \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left(f(x_i + \vartheta_i^{(max)} l_i, y) - f(x_i + \vartheta_i^{(min)} l_i, y) \right)$$

Aufgrund der Stetigkeit von $f(x,y)$ muß ein $N(\varepsilon)$ existieren, so daß

$$|f(x_i+\vartheta_i^{(max)} l_i, y) - f(x_i+\vartheta_i^{(min)} l_i, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für $n > N(\varepsilon)$.

Somit

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left(f(x_i+\vartheta_i^{(max)} l_i, y) - f(x_i+\vartheta_i^{(min)} l_i, y)\right) <$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon \quad \text{für } n > N(\varepsilon)$$

und daher das zu zeigende

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} l_i f(x_i+\vartheta_i l_i, y)\right) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$.

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Riemann-Summe gilt für stetiges $f(x,y)$:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b dx\, f(x,y) = \int_a^b dx\, f(x,y_0)$$

$$\int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$$

Für stetiges $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $f(x,y)$ gilt zudem:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b dx\, f(x,y) = \int_a^b dx\, \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$\Rightarrow$ Für stetige und differenzierbare Funktionen sind Integration und partielle Differentation nach verschiedenen Variablen beliebig vertauschbar.

Stückweise stetige Funktionen

$\rightarrow$ Zerlegung der Integrale in Teile und Betrachtung der sich ergebenden uneigentlichen Integrale

Beispiel:

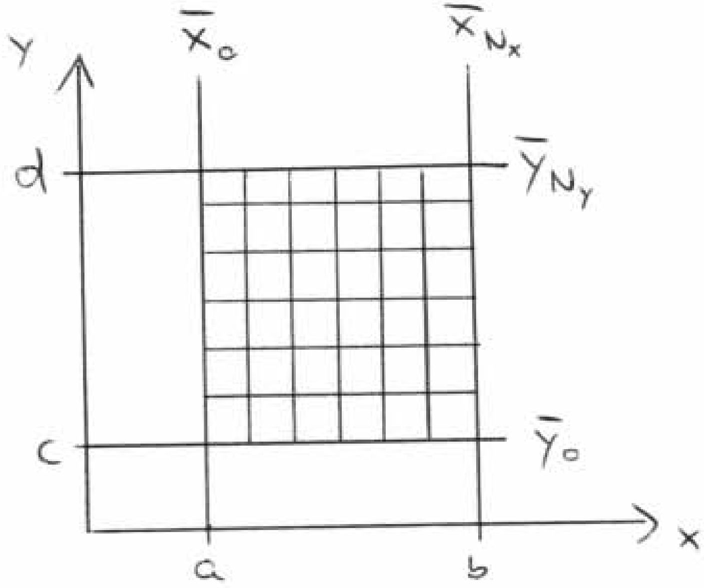
$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dx\, \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{a \to 0} \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{-|a|} dx\, \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$+ \lim_{b \to 0} \int_{-1}^{1} dy \int_{|b|}^{1} dx\, \frac{xy}{x^2+y^2}$$

falls die Grenzwerte existieren

Bisher: Integrale über „rechteckige Bereiche"

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \; f(x,y) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{oder allgemeiner:} \\ \displaystyle\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \; f(x,y) \end{array} \right)$$



Unabhängige Riemann-Summierung über beide Koordinaten:

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot f(x_i, y_j)$$

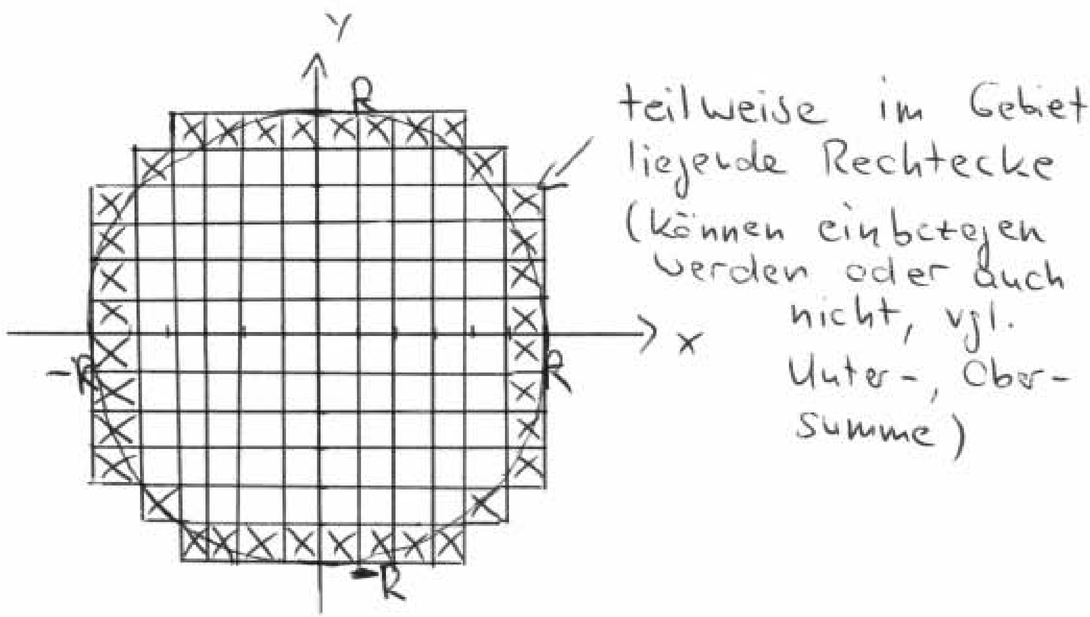
$$\left(\text{mit } \Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}, \quad x_i = \bar{x}_{i-1} - \vartheta_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1})\right)$$

oder: gleichzeitige Summierung über alle Rechtecke mit einem gemeinsamen Summations-index

$$\sum_{n=1}^{N_x \cdot N_y} \Delta x(n) \cdot \Delta y(n) \cdot f(x(n), y(n))$$

Die gleichzeitige Summierung über alle Rechtecke ermöglicht auch die Betrachtung von Integralen über anders geformte Bereiche.

z.B.: $\iint\limits_{\substack{\text{Kreis mit}\\ \text{Radius } r\\ \text{um } (0,0)}} dx\,dy\; f(x,y)$



$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \, \Delta y_n \, f(x_n, y_n)$$

(wobei n nun die 2D-Rechteckbereiche bzw. Koordinatenwerte x_n, y_n aus diesen Bereichen durchzählt)

Idee für die praktische Integralauswertung: Transformation auf andere Koordinaten, in denen das Integral dann wieder über rechteckige Bereiche auszuwerten ist.

Hier: Polarkoordinaten in 2D

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad r \in [0, \infty[$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Ein Kreis mit Radius R um $(0,0)$ ist ein Gebiet mit $r \in [0, R]$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

$\rightarrow$ Einfache Integralgrenzen: $\int_0^R dR \int_0^{2\pi} d\varphi$

Transformierte Funktion:

$$f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) := \bar{f}(r,\varphi)$$

Idee für die Umschreibung des Integrals:

$$\int_{\text{Kugel}} dx \int dy \; f(x,y) = \int_0^R dR \int_0^{2\pi} d\varphi \; g(r,\varphi)$$

$g(r,\varphi) = \,?$ $\rightarrow$ mehrdimensionale Substitutionsregel

Wiederholung: 1D-Substitutionsregel

$$\left.\begin{aligned} x &= x(y) \\ y &= y(x) \end{aligned}\right\}$$ streng monoton steigende oder fallende Funktionen (→ Existenz der Umkehrfunktion)

$$f(x(y)) = \bar{f}(y) \qquad \Rightarrow$$

$$\int_a^b dx\ f(x) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\ \bar{f}(y) \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$= -\int_{y(b)}^{y(a)} dy\ \bar{f}(y) \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$= \int_{\text{Intervall}} dy\ \bar{f}(y) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

da: $\frac{dy}{dx} > 0$ in $[a,b] \Rightarrow \frac{dx}{dy} > 0$, $y(a) < y(b)$

$\frac{dy}{dx} < 0$ in $[a,b] \Rightarrow \frac{dx}{dy} < 0$, $y(a) > y(b)$

Betrachtung der Riemann-Summen:

$$\int_a^b dx\; f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_{\text{Intervall}} dy\; \bar{f}(y) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(y_i) \cdot \left|\frac{dx}{dy}(y_i)\right| \cdot \Delta y_i$$

wähle Diskretisierung so, daß $y_i = y(x_i)$ $\Rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot \underbrace{\left|\frac{dx}{dy}(y_i)\right| \cdot \Delta y_i}_{= \Delta x_i}$$

(für kleine Intervalle gilt: $\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} - \frac{dx}{dy}(y_i)$)

$\Rightarrow$ Der Faktor $\left|\frac{dx}{dy}\right|$ ergibt sich aus der unterschiedlichen Länge der Intervalle

$$\Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}$$

und

$$\Delta y_i = \bar{y}_i - \bar{y}_{i-1} = y(\bar{x}_i) - y(\bar{x}_{i-1})$$

$$= \frac{dy}{dx}(x_i) \cdot (\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) = \frac{dy}{dx}(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale

→ Flächen- bzw. Volumenelemente ΔV_i

an Stelle von Intervallen Δx_i

2D:

$$\iint\limits_{\text{Gebiet}} dx\,dy \;\; f(x,y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) \cdot \Delta V_i \,,$$

$$\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

n-dimensional:

$$\int\limits_{\text{Gebiet}} d^n x \;\; f(\underline{x}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta V_i$$

↑

n-dim. Integration

$$\Delta V_i = \Delta x_{1i} \cdot \Delta x_{2i} \cdot \ldots \cdot \Delta x_{ni}$$

Wie verändert sich ein Volumenelement bei Substitution?

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$$

$$\Rightarrow \; x_a(\underline{u}) = x_a(\underline{v}) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial x_a}{\partial u_j}\right|_{\underline{v}} (u_j - v_j) + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad x_a(\underline{u}) - x_a(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_a}{\partial u_j}\bigg|_{\underline{v}} (u_j - v_j) + \ldots$$

Für kleine Abstände $\| \underline{u} - \underline{v} \|$ wird die Veränderung der Differenzvektoren also durch eine lineare Transformation mit der Jacobi-Matrix

$$A_{aj}(\underline{u}) = \frac{\partial x_a}{\partial u_j}\bigg|_{\underline{u}}$$

gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta x_a &= x_a(\underline{u} + \underline{\Delta u}) - x_a(\underline{u}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{aj}(\underline{u}) \cdot \Delta u_j \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta x} = \underline{\underline{A}}(\underline{u}) \cdot \underline{\Delta u}$$

Betrachtet man jetzt das Volumen, welches ein von n Vektoren $\underline{\Delta x}_n$ aufgespannter kleiner Quader hat, so findet man in einer Umgebung um $\underline{u}$:

$$\underline{\Delta x}_n = \underline{\underline{A}}(\underline{u}) \cdot \underline{\Delta u}_n$$

$$|\det(\underline{\Delta x}_1, \underline{\Delta x}_2, \dots, \underline{\Delta x}_n)| =$$

$$|\det(\underline{\underline{A}}(\underline{u})\,\underline{\Delta u}_1, \underline{\underline{A}}(\underline{u})\,\underline{\Delta u}_2, \dots, \underline{\underline{A}}(\underline{u})\,\underline{\Delta u}_n)| =$$

$$|\det(\underline{\underline{A}}(\underline{u}))| \cdot |\det(\underline{\Delta u}_1, \underline{\Delta u}_2, \dots, \underline{\Delta u}_n)|$$

Somit:

$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \dots \cdot \Delta x_n =$$

$$\left|\det\left(\frac{\partial x_a}{\partial u_j}\right)\Big|_{\underline{u}}\right| \cdot \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 \cdot \dots \cdot \Delta u_n$$

Folglich:

$$\int_{\text{Gebiet}} d^n x \; f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta V_i =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(\underline{x}(\underline{u}_i)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial x_a}{\partial u_j}\Big|_{\underline{u}}\right)\right| \cdot \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 \cdot \dots \cdot \Delta u_n =$$

$$\int_{\text{Gebiet}} d^n u \; f(\underline{x}(\underline{u})) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial x_a}{\partial u_j}\Big|_{\underline{u}}\right)\right|$$

→ Bei der mehrdimensionale Substitution tritt die Determinante der Jacobi-Matrix an die Stelle von $\frac{dx}{dy}$ in 1D.

Satz

Sei $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$ auf einem Gebiet eine eindeutige Abbildung von $\underline{u}$ auf $\underline{x}$, so gilt

$$\underbrace{\int}_{\substack{\text{Gebiet} \\ \text{in } \underline{x}}} d^n x \; f(\underline{x}) = \underbrace{\int}_{\substack{\text{Gebiet} \\ \text{in } \underline{u}}} d^n u \; f(\underline{x}(\underline{u})) \cdot \left| \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \Big|_{\underline{u}} \right) \right|$$

falls die entsprechenden Integrale existieren und sich die Gebiete durch die Abbildung auseinander ergeben.

Anwendung auf Anfangsbeispiel:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos\varphi$$

$\Rightarrow$ Jacobi - Determinate

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Kugel mit Radius } R}{\iint dx\, dy}\; f(x,y) =$$

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r \cdot f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$$

Sei $f(x,y) = g(x^2+y^2)$

$$\Rightarrow \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r \cdot g(r) = \int_0^R dr\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kreisumfang}}}{2\pi r} \cdot g(r)$$

$\rightarrow$ Integration über Kreisschreiben mit Flächen $2\pi r \cdot \Delta r$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g(r_i) \cdot 2\pi r_i \Delta r_i$$