3. Matrizen

3.1. Lineare Abbildungen

bisher: Abbildungen von zwei oder mehr Vektoren auf Zahlen (Skalarprodukt,..)

Mathe I: Abbildungen von Zahlen auf Zahlen

jetzt: Abbildungen von Vektoren auf Vektoren
→ „Vektorfunktionen"

speziell: Abbildungen mit Linearitätseigenschaft

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

<u>Definition</u>

Sei K ein Körper und V, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear oder Homomorphismus, wenn

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad , a, b \in \mathbb{V},$$

und

$$f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a) \quad , a \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Genau wie bei Skalarprodukt oder Determinante kann auch eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen Vektorraums durch Angabe der Bilder $f(e_i)$ der Basisvektoren e_i eindeutig bestimmt werden.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad (v_i \in \mathbb{K},\ e_i \in V)$$

$$\Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_i v_i f(e_i)$$

Darstellung des Bildvektors $w = f(v)$ in einer Basis $\tilde{e}_j$ des Bildvektorraums W:

$$f(v) = w = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{e}_j \quad (w_i \in \mathbb{K},\ \tilde{e}_j \in W)$$

Darstellung der $f(e_i)$:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \tilde{e}_j$$

$$\Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i a_{ji} \tilde{e}_j$$

Also

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i a_{ji} \tilde{e}_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left(w_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i\right) \tilde{e}_j = 0 \quad \Rightarrow$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix}}}{a_{ji}} \, v_i$$

<u>Definition</u>

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.
Eine $m \times n$ Matrix ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ji} \in \mathbb{K}.$$

Für unendlich-dimensionale Vektorräume gilt eine analoge Beziehung, allerdings genügt hier nicht mehr die Angabe einer endlichen Zahl von Matrixelementen a_{ji}, um die lineare Abbildung eindeutig zu bestimmen.

Beispiel: Raum der differenzierbaren Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

$f(x) \to \frac{df}{dx}$ ist eine lineare Abbildung.

Welche Dimension hat der Bildraum?

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i)$$

$\Rightarrow$ Der Bildraum ist der Aufspann der n Vektoren $f(e_i)$

$\Rightarrow$ Der Bildraum ist ein Untervektorraum von W mit Dimension $\leq n$.

$\Rightarrow$ Dim $\leq n$ und Dim $\leq m$

<u>Definition</u>

Die Dimension des Bildraums einer linearen Abbildung bezeichnet man als deren <u>Rang</u>.

Wir haben gesehen, daß wir (im Endlich-dimensionalen) eine lineare Abbildung immer mittels einer Matrix beschreiben können, daher wollen wir uns im Folgenden nur noch mit dem Rechnen mit Matrizen beschäftigen.

Eine lineare Abbildung wird auch als Wirkung eines <u>linearen Operators</u> beschrieben

$\rightarrow$ Beispiel Quantenmechanik $\rightarrow$ Hamiltonoperator

3.2. Rechnen mit Matrizen

Verknüpfungen bzw. Skalierungen linearer Abbildungen können wie folgt <u>definiert</u> werden:

- Skalierung: $\tilde{f} = \lambda \cdot f \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$

  $\tilde{f}(v) = \lambda \cdot f(v)$

- Addition: $\tilde{f} = f_1 + f_2$

  $\tilde{f}(v) = f_1(v) + f_2(v)$

- Produkt: $\tilde{f} = f_1 \cdot f_2$

  $\tilde{f}(v) = f_1(f_2(v))$

  $\rightarrow$ als Produkt bezeichnet man hier das Hintereinanderausführen zweier Abbildungen, daher i.A. $f_1 \cdot f_2 \neq f_2 \cdot f_1$

Entsprechend lassen sich dann diese Operationen für Matrizen definieren.

Die bezüglich der Basen $\{e_i, i=1,\dots,n\}$ und $\{\tilde{e}_j, j=1,\dots,m\}$ des Ur- bzw. Bildraums einer linearen Abbildung f entsprechende Matrix A ist definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \tilde{e}_i \quad .$$

Damit gilt für die der Abbildung $\tilde{f}$ zugeordnete Matrix $\tilde{A}$:

- Skalierung

$$\tilde{f} = \lambda \cdot f \quad , \quad \tilde{A} = \lambda \cdot A$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ji}\, \tilde{e}_j = \tilde{f}(e_i) = \lambda\, f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda\, a_{ji}\, \tilde{e}_j$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_{ji} = \lambda\, a_{ji}$$

Also:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Addition

$$\tilde{f} = f^{(1)} + f^{(2)} \quad , \quad \tilde{A} = A^{(1)} + A^{(2)}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ji} \tilde{e}_j = \tilde{f}(e_i) = f^{(1)}(e_i) + f^{(2)}(e_i) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(1)} \tilde{e}_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(2)} \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ji}^{(1)} + a_{ji}^{(2)}\right) \tilde{e}_j$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_{ji} = a_{ji}^{(1)} + a_{ji}^{(2)}$$

Also

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(1)} + a_{12}^{(2)} & \cdots \\ a_{21}^{(1)} + a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Produkt

$\tilde{f} = f^{(1)} \cdot f^{(2)}$, $\tilde{A} = A^{(1)} \cdot A^{(2)}$

Hier ist die Betrachtung etwas komplizierter, da nebem dem Urraum und dem Bildraum von $\tilde{f}$ auch der Bildraum von $f^{(2)}$ (auf dem dann auch $f^{(1)}$ wirkt) betrachtet werden muß. Dazu wird eine zusätzliche Basis $\{\bar{e}_k, k = 1, \dots, \ell\}$ eingeführt, die den Bildraum von $f^{(2)}$ aufspannt.

Also:

$$f^{(2)}(e_i) = \sum_{k=1}^{\ell} a^{(2)}_{ki} \, \bar{e}_k$$

$$f^{(1)}(\bar{e}_k) = \sum_{j=1}^{m} a^{(1)}_{jk} \, \tilde{e}_j$$

$$\tilde{f}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ji} \, \tilde{e}_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ji} \tilde{e}_j = f(e_i) = f^{(1)}\left(f^{(2)}(e_i) \right) =$$

$$f^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}^{(2)} \bar{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}^{(2)} \, f^{(1)}(\bar{e}_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}^{(2)} \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(1)} \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\ell} a_{jk}^{(1)} a_{ki}^{(2)} \right) \tilde{e}_j$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_{ji} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{jk}^{(1)} a_{ki}^{(2)}$$

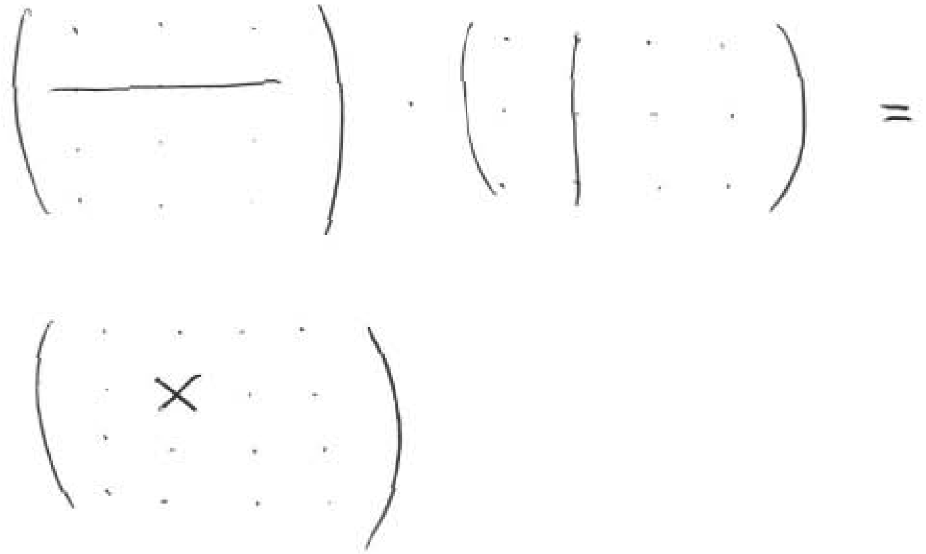
Also

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1\ell}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2\ell}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & & a_{m\ell}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{\ell 1}^{(2)} & a_{\ell 2}^{(2)} & & a_{\ell n}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$m \times \ell$ - Matrix $\cdot$ $\ell \times n$ - Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} + \dots + a_{1\ell}^{(1)} a_{\ell 1}^{(2)} & \dots \\ \vdots & \ddots \\ a_{m1}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{m2}^{(1)} a_{21}^{(2)} + \dots + a_{m\ell}^{(1)} a_{\ell 1}^{(2)} & a_{m1}^{(1)} a_{1n}^{(2)} + \dots + a_{m\ell}^{(1)} a_{\ell n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ - Matrix



Zeile × Spalte → neues Element

$$\sum_k a^{(1)}_{jk} \cdot a^{(2)}_{ki} = \tilde{a}_{ji}$$

Entsprechend läßt sich auch das Produkt zwischen Matrizen und Vektoren durch die Wirkung der linearen Abbildung auf den Vektor in der Basisdarstellung definieren.

$$w = f(v) \quad ; \quad w = A \cdot v$$

mit: $$w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \, v_k$$

⇒ Die Komponenten des Vektors lassen sich $n \times 1$-Matrix verstehen

Dieses läßt symbolisch durch eine Schreibweise

$$\underline{w} = \underline{\underline{A}} \; \underline{v}$$

ausdrücken, wobei Matrizen, die in Komponentendarstellung 2 Indizees aufweisen, entsprechend durch zwei Unterstreichungen gekennzeichnet werden und Vektoren durch eine Unterstreichung.

Aufgrund ihrer Definition gelten für Matriten folgenden Rechenregeln:

$$\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot (\lambda \cdot \underline{\underline{B}} + \mu \cdot \underline{\underline{C}}) = \lambda \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) + \mu \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}})$$

$$(\lambda \cdot \underline{\underline{B}} + \mu \cdot \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{A}} = \lambda \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) + \mu \cdot (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}})$$

→ analog zu „normalen' Summen und Produkten (von Zahlen)

aber im Allgemeinen: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

3.3. Matrizenräume

Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} = 0$$

ist ein neutrales Element der Matrizenaddition:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$$

Die Matrizenaddition ist kommutativ

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$$

und zu jeder Matrix $\underline{\underline{A}}$ existiert das bezüglich Addition inverse Element

$$-\underline{\underline{A}} = (-1) \cdot \underline{\underline{A}}$$

$\Rightarrow$ Die $n \times m$-Matrizen bilden bezüglich Addition und skalarer Multiplikation einen Vektorraum über dem entsprechenden Körper $\mathbb{K}$.
Die Dimension ist $n \cdot m$.

Mögliche Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \ldots$$

Diese Basis kann jetzt als orthonormale Basis gewählt werden und dadurch ergibt sich dann auch ein Skalarprodukt für diesen Vektorraum.

Wiederholung: Skalarprodukt von Vektoren in Komponentendarstellung bezüglich einer Orthonormalbasis e_i, $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\langle w | v \rangle = \sum_{i=1}^{k} w_i^* v_i$$

Wobei: $w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{k} v_i e_i$

Entsprechend gilt nun:

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{*} \, b_{ij}$$

(wobei hier zwei Indizees genutzt wurden, um Spalten und Zeilen der Matrix separat zu zählen)

Dies läßt sich als Matrizenprodukt verstehen, wenn man die konjugierte bzw. im Reellen die transponierte Matrix einführt

<u>Definition</u>:

Eine Matrix C heißt zu A <u>adjungiert</u>, wenn:

$$c_{ij} = a_{ji}^{*} .$$

Man schreibt dann $C = A^{+}$.

Eine Matrix C heißt zu A <u>transponiert</u>, wenn:

$$c_{ij} = a_{ij}$$

Man schreibt dann $C = A^{T}$.

Gilt $A = A^+$, so heißt A selbstadjungiert oder hermitesch.

Gilt $A = A^T$, so heißt A symmetrisch.

Folglich gilt für das Skalarprodukt:

$$\langle A | B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^+_{ji} \, b_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (A^+ \cdot B)_{jj}$$

$A^+ \cdot B$ ist eine $m \times m$ - Matrix.

<u>Definition</u>

Die Summe der Diagonalelemente einer $n \times n$ - Matrix bezeichnet man als Spur:

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Also:

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{Spur}(A^+ \cdot B)$$

Da sich ein Vektor v in Komponentendarstellung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

als $n \times 1$ - Matrix verstehen läßt, enthält diese Skalarproduktdefinition auch das „normale" Skalarprodukt von Vektoren v und w.

$$\langle v | w \rangle = \mathrm{Spur}\left((v_1^* \; v_2^* \; v_3^* \ldots) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Spur}\left(v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots \right)$$

$$= v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3$$

Nutzt man für Vektoret die Notation $\underline{v}$, wobei die Unterstreichung die Existenz eines Indexes andeutet, und für Matrizen die Notation $\underline{\underline{A}}$ (zwei Indizees), so kann man schreiben

$$\langle v | w \rangle = \underline{v}^+ \cdot \underline{w}$$

wobei das Produkt als Matrizenprodukt (einer $1 \times n$ mit einer $n \times 1$ - Matrix) zu verstehen ist.

$$\underline{v}^{+} \cdot \underline{w} = \sum_i v_i^* w_i$$

Entsprechend schreibt man die lineare Abbildung von v auf w mittels einer Matrix A als

$$\underline{w} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad w_j = \sum_i A_{ji} v_i$$

Für das Adjungieren und Transponieren gelten folgende einfache Rechenregeln:

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^{+} = \underline{\underline{A}}^{+} + \underline{\underline{B}}^{+} \quad , \quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^{T} = \underline{\underline{A}}^{T} + \underline{\underline{B}}^{T}$$

$$(\lambda \cdot \underline{\underline{A}})^{+} = \lambda^{*} \cdot \underline{\underline{A}}^{+} \quad , \quad (\lambda \cdot \underline{\underline{A}})^{T} = \lambda \cdot \underline{\underline{A}}^{T}$$

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{+} = \underline{\underline{B}}^{+} \cdot \underline{\underline{A}}^{+} \quad , \quad (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{T} = \underline{\underline{B}}^{T} \cdot \underline{\underline{A}}^{T}$$

Betrachten wir Matrizen und somit auch lineare Abbildung als Vektoren, so können wir jetzt wiederum lineare Abbildungen von Matrizen auf Matrizen betrachten:

$$\underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{\tilde{A}}}$$

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{n,m} \Gamma_{ijnm} \, a_{nm}$$

Dieses ist beliebig wiederholbar:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}} \rightarrow \underline{\underline{\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}}}$$

$$\Gamma_{ijnm} = \sum_{a,b,c,d} \Delta_{ijnmabcd} \; \Gamma_{abcd}$$

Objekte mit mehreren Indizees bezeichnet man dann als <u>Tensoren</u>:

a_i : Tensor 1. Stufe

a_{ij} : Tensor 2. Stufe

a_{ijk} : Tensor 3. Stufe

3.4. Quadratische Matrizen

Definition

Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl bezeichnet man als quadratisch.

Beschränkt man die Betrachtung auf quadratische Matrizen, so läßt sich jeweils für den Raum der $n \times n$-Matrizen ein Neutralelement bezüglich der Matrizenmultiplikation, die Einsmatrix

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} , \quad e_{ij} = \delta_{ij} ,$$

finden:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} \delta_{mj} = \sum_{m=1}^{n} \delta_{im} a_{mj} = a_{ij}$$

Die Determinante

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ordnet einer quadratischen Matrix eine Zahl zu.

Es gilt:

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}}) \cdot \det(\underline{\underline{B}})$$

Beweis:

Eine $\overbrace{\text{beliebige}}^{n \times n}$ Matrix $\underline{\underline{B}}$ läßt sich durch Linearkombination der Spalten ohne Veränderung des Wert ihrer Determinante immer so umformen, daß

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & d_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} d_n$$

(→ Herleitung des Laplaceschen Entwicklungssatzes)

Da $\tilde{\underline{b}}_i = \underline{\underline{A}}\, \underline{b}_i$ eine lineare Abbildung, läßt sich die Matrix $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ analog durch die gleichen Linearkombinationen auf die Form

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det\left(\underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots, \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_n \end{pmatrix} \right)$$

bringen. Also

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \left(\prod_{i=1}^{n} d_n \right) \det\left(\underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots \right)$$

$$= \det(\underline{\underline{B}}) \cdot \det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}})$$

$$= \det(\underline{\underline{B}}) \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

Es gilt weiter:

$$\det(\lambda \cdot \underline{\underline{A}}) = \lambda^n \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

Also im Allgemeinen:

$$\det(\lambda \cdot \underline{\underline{A}}) \neq \lambda \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

$$\det(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \neq \det(\underline{\underline{A}}) + \det(\underline{\underline{B}})$$

Analog zum Rang einer linearen Abbildung kann man den <u>Rang einer Matrix</u> als die Dimension des von ihren Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren aufgespannten Raumes einführen.

Da die Spalten- bzw. Zeilenvektoren einer quadratischen Matrix linear unabhängig sind, wenn ihre Determinante ungleich Null ist, gilt:

Der Rang einer $n \times n$-Matrix ist n, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Zeilen- und Spaltenrang einer quadratischen Matrix sind gleich (→ Transpositionsinvarianz der Determinante).

Nach der Einführung der Einsmatrix als Neutralelement der Matrizenmultiplikation ergibt sich nun die Frage nach dem multiplikativen Inversen $\underline{\underline{A}}^{-1}$ einer Matrix $\underline{\underline{A}}$. Man sucht also eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$, die die Forderung

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

erfüllt. Wegen

$$1 = \det(\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^{-1}) \det(\underline{\underline{A}})$$

kann diese nur existieren, falls

$$\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0 .$$

Die obige Forderung ist im strengen Sinne die Forderung nach einer linksinversen Matrix, da aus $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ wegen der Nichtkommutativität des Matrizenprodukts nicht trivial $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ folgt. Betrachtet man aber explizit die zu $\underline{\underline{A}}$ rechtsinverse Matrix $\underline{\underline{B}}$,

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}} \quad ,$$

so folgt aus der Existenz von $\underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{A}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}$$

$$\Leftrightarrow (\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Rechts- und linksinverse Matrix müssen somit identisch sein.

<u>Definition</u>

Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt <u>invertierbar</u> oder <u>regulär</u>, wenn eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert, für die gilt:

$$\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \, \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

Rechenregeln:

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$$

$$(\underline{\underline{A}}^{+})^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{+}$$

<u>Definition</u>

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt unitär, wenn

$$\underline{\underline{A}}^{+} = \underline{\underline{A}}^{-1} .$$

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt orthogonal, wenn

$$\underline{\underline{A}}^{T} = \underline{\underline{A}}^{-1} .$$

Unitäre Matrizen (bzw. orthogonale Matrizen im Reellen) stellen verallgemeinerte Rotation und Spiegelungen dar, da sie Skalarprodukte bei entsprechender linearer Abbildung unverändert lassen:

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad , \quad \underline{\tilde{y}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \quad \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{x} | \tilde{y} \rangle = (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^{+} \cdot (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}) = \underline{x}^{+}\,\underline{\underline{A}}^{+}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$= \underline{x}^{+}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{x}^{+}\underline{y} \quad \text{für } \underline{\underline{A}} \text{ unitär}$$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1. Beispiele und Typen

Problem der Berechnung inverser Matrizen:

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$, gesucht $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

lineare Abhängigkeit von Vektoren:

$\left(\sum_i \underline{a}_i \cdot \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \right) \Rightarrow \underline{a}_i$ linear abhängig

also: Frage der Existenz einer nichttrivale Lösung ($\underline{\lambda} \neq 0$) für die Gleichung

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\lambda} = 0$$

Lineare Abbildung:
Bildvektoren $\underline{b}$ bekannt,
Urvektoren $\underline{x}$ gesucht:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Allgemeine Problemstellung:

gesucht ist der Vektor $\underline{x}$, der bei gegebenen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{b}$ die Gleichung

$$\underline{\underline{A}} \; \underline{x} = \underline{b}$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \, x_j = b_i \quad , \; i = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt.

Klassifizierung:

$\underline{b} = 0 \quad \Rightarrow$ linear homogenes Gleichungssystem

$\underline{b} \neq 0 \quad \Rightarrow$ linear inhomogenes Gleichungssystem

Matrixinversion läßt sich als Spezialfall des linear inhomogenen Gleichungssystem betrachten:

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \, x_{jn} = \delta_{in} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j,k} \left(A_{ij} \cdot \delta_{nk} \right) \cdot x_{jk} = \delta_{in}$$

$$\underline{\underline{\underline{\tilde{A}}}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$$

4.2. Gaußsches Eliminationsverfahren

Allgemeines Schema zum Lösen linearer Gleichungssysteme. $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.

Durch elementare Umformung wird die Matrix auf der linken Seiten auf Dreiecksgestalt gebracht.

Erklärung am Beispiel:

schematisch

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 12 \quad (\mathrm{I}) \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 20 \quad (\mathrm{II}) \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 &= 33 \quad (\mathrm{III}) \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 8 & -3 & 2 & 20 \\ 4 & 11 & -1 & 33 \end{array}\right)$$

Wähle eine Zeile mit $a_{i1} \neq 0$.
Addiere ein Vielfaches dieser Zeile zum einem Vielfachen einer anderen Zeile, so daß für die andere Zeile der neue Wert von $a_{j1} = 0$.
Dies geschieht für alle anderen Zeilen.

hier z.B.: $(\mathrm{II}) - 4\cdot(\mathrm{I})$, $(\mathrm{III}) - 2\cdot(\mathrm{I})$ $\Rightarrow$

schematisch

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 12 \quad (\mathrm{I}) \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 14x_3 &= -28 \quad (\tilde{\mathrm{II}}) \\ 0\cdot x_1 + 9x_2 - 9x_3 &= 9 \quad (\tilde{\mathrm{III}}) \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -7 & -14 & -28 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \end{array}\right)$$

Wiederhole entsprechende Schritte bis eine Dreiecksgestalt erreicht ist.

hier z.B.: $(\tilde{\text{III}}) + \frac{9}{7}\cdot(\tilde{\text{II}}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 12 \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 14x_3 &= -28 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 27x_3 &= -27 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -7 & -14 & -28 \\ 0 & 0 & -27 & -27 \end{array}\right)$$

Zur Vereinfachung kann jederzeit jede Zeile mit einer Zahl multiplizert werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -7 & -14 & -28 \\ 0 & 9 & -5 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Lösung ergibt sich dann durch sukzessives Einsetzen

$$x_3 = 1$$

$$-x_2 - 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = 4 - 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 4x3 = 12 \Rightarrow x_1 = 6 - \tfrac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 3$$

Alternativ kann man die Matrix auf der linken Seite auch direkt auf Diagonalform oder sogar „Eins-Form" bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ein entsprechendes Schema kann zur Berechnung inverser Matrizen genutzt werden:

schematisch

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

Wann funktioniert dieses Schema zur Matrizeninversion?

Dann, wenn sich bei jeden Schritt im Gaußschen Eliminationsverfahren in der fraglichen Spalte i ein a_{ji} findet, für das $a_{ji} \neq 0$.

Findet sich eine solches $a_{ji} \neq 0$ nicht, so kann also durch Linearkombination ein Spaltenvektor auf Null gebracht werden. Für quadratische Matrizen $\underline{\underline{A}}$ ist dies dann und nur dann möglich, wenn

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 0 \, .$$

Satz

Eine quadratische Matrix ist dann und nur dann invertierbar, wenn

$$\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0 \, .$$

Da zur Lösung von Gleichungssystemen nur die Erzeugung einer Dreiecksform, nicht jedoch die einer „Eins - Form", erforderlich ist, resultiert dort aus $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$ nicht unbedingt die Nichtlösbarkeit.

Beispiel:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)}_{\det(\underline{\underline{A}}) = 0} \Rightarrow$$

$$-3\,x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$$

$$1\,x_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1 \quad \text{(erfüllt wegen oben)}$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 16 - 2x_1$$

Eindimensionaler Lösungsraum:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 16 - 2\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.3. Lösungsmengen

Betrachte das linear homogenene Gleichungs-system

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0 \iff \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

- $\underline{x} = 0$ ist eine Lösung jedes homogenen Gleichungssystems → triviale Lösung.

- eine nichttriviale Lösung $\underline{x} \neq 0$ existiert dann, wenn die Spaltenvektoren $\underline{a}_j$ linear abhängig sind.

- die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren ist die Dimensionalität des Bildraums, also gleich dem Rang der Matrix $\underline{\underline{A}}$.

1. Fall : $m = n$

Ein nichttrivale Lösung existiert dann und nur dann, wenn die n Spaltenvektoren linear abhängig sind, also $\text{Rang}(\underline{\underline{A}}) < n$ bzw.

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 0$$

2. Fall : $m > n$

Da die m n-dimensionalen Vektoren $\underline{a}_j$ immer linear abhängig, existiert immer eine nichttriviale Lsg.

3. Fall : $n > m$

Die m Vektoren $\underline{a}_j$ sind linear abhängig, wenn $\text{Rang}(\underline{\underline{A}}) < m$. Dann existiert eine nichttriviale Lösung.

Allgemein:

Eine nichttriviale Lösung existiert, wenn $\text{Rang}(\underline{\underline{A}}) < m$. Diese Lösung besitzt $(m - \text{Rang}(\underline{\underline{A}}))$ freie Parameter, d.h. der Vektorraum der Lösungen $\underline{\underline{x}}$ ist $(m - \text{Rang}(\underline{\underline{A}}))$-dimensional.

Betrachte nun das linear inhomogene Gleichungssystem

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

und eine Lösung $\underline{y}$ des zugehörigen linear homogenen Gleichungssystems

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = 0 \,.$$

Dann ist auch $\underline{x} + \underline{y}$ immer Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, da

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$\Rightarrow$ Die Dimensionalitäten der Lösungsräume von linear homogenem und linear inhomogenem Gleichungssystem sind gleich, sofern eine Lösung des linear inhomogenen Systems existiert.

Ob eine Lösung des inhomogenen Systems existiert, hängt im Allgemeinen vom konkreten $\underline{b}$ ab.

Für $n = m$ und $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$ existiert jedoch immer genau eine Lösung, da

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$, wenn $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert

5. Eigenwertprobleme

5.1. Lineare Differentialgleichungssysteme

Mathe I - Vorlesung:

Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung:

$$0 = g\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \quad , \; y = y(x)$$

linear homogene DGL's 1. Ord.:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot y$$

linear homogene DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot y \qquad \Rightarrow y(x) = \text{const.} \cdot e^{cx}$$

jetzt:
Systeme linear homogener DGL's mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j \qquad \text{mit} \quad \underline{y} = \underline{y}(x)$$

Beispiel: Relaxationskaskade

$$A \xrightarrow{k_1} B \quad , \quad B \xrightarrow{k_3} C$$
$$A \xrightarrow{k_2} C$$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1 [A] - k_2 [A]$$
$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_3 [B]$$
$$\frac{d[C]}{dt} = k_2 [A] + k_3 [B]$$

oder Abbildung von DLG's höherer Ordnung auf Systeme 1. Ordnung

$$y'''(x) + y''(x) + y'(x) = -2y(x)$$

mit:
$$y_3(x) := y''(x)$$
$$y_2(x) := y'(x)$$
$$y_1(x) := y(x)$$

folgt

$$\frac{dy_3}{dx} = -y_3 - y_2 - 2y_1$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_3$$
$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

Die Lösung von

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, y_j$$

erhält man durch den Ansatz

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \, e^{\lambda_k x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot \lambda_k \cdot e^{\lambda_k x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, y_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} u_{jk} \, e^{\lambda_k x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, u_{jk} \, e^{\lambda_k x}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(u_{ik} \cdot \lambda_k \right) \cdot e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, u_{jk} \right) e^{\lambda_k x}$$

Eine Lösung wird also durch $\underline{\underline{u}}$'s und λ_k's gegeben, die die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, u_{jk} = \lambda_k \, u_{ik}$$

oder

$$\underline{\underline{C}}\ \underline{u}_k = \lambda_k\ \underline{u}_k$$

erfüllen.

Hierbei handelt es sich um ein <u>Eigenwertproblem</u>. Die Werte λ_k bezeichnet man als <u>Eigenwerte</u> von $\underline{\underline{C}}$, die Vektoren $\underline{u}_k$ als <u>Eigenvektoren</u> von $\underline{\underline{C}}$, wobei $\underline{u}_k$ der Eigenvektor zum Eigenwert λ_k ist. Dabei muß $\underline{u}_k \neq 0$ gelten.

Eigenwertprobleme nehmen eine zentrale Stellung in der Quantenmechanik ein:

Schrödingergleichung $\underline{\underline{H}}\ \Psi = E\ \Psi$

5.2. Bestimmung von Eigenwerten und -vektoren

Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{u}_k = \lambda_k \underline{u}_k$$

$$\Rightarrow \left(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}} \right) \underline{u}_k = 0$$

linear homogenes Gleichungssystem
mit noch unbestimmten Parameter λ_k

Gewünschte nichttrivale Lsg. $\underline{u}_k$ existieren dann und nur dann, wenn

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}} \right) = 0$$

Für eine $n \times n$ - Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \cdot \underline{\underline{E}} \right)$ ein Polynom n-ter Ordnung in λ_k ($\rightarrow$ Laplacescher Entwicklungssatz). Die Eigenwerte λ_k sind also die Nullstellen des Polynoms (<u>charakteristisches Polynom</u>)

$$P_n(\lambda_k) = \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \cdot \underline{\underline{E}} \right)$$

Für einen Eigenwert λ_k ergeben sich die zugehörigen Eigenvektoren bzw. der zugehörige Eigenvektor als Lsg. des Gleichungssystems

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}})\, \underline{u}_k = 0$$

Wegen $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) = 0$ ist der Raum der Lösungen mindestens eindimensional.

(const $\cdot\, \underline{u}_k$ ist immer eine Lsg., wenn $\underline{u}_k$ eine Lösung ist).

Ist der Raum der Lösungen höher-dimensional, so bezeichnet man den Eigenwert λ_k als <u>entartet</u>. Ein <u>m-fach entarteter Eigenwert</u> besitzt einen m-dimensionalen Raum von zugehörigen Eigenvektoren. Den Raum der Eigenvektoren charakterisiert man dann durch Angabe von m Eigenvektoren, die eine Basis dieses Raums bilden.

5.3. Diagonalisierung von Matrizen

Besitzt eine $n \times n$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\underline{u}_k$ mit Eigenwerten λ_k, so ist die Matrix $\underline{\underline{U}} = (\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \dots \ \underline{u}_n)$ invertierbar und es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jk} = u_{jk} \cdot \lambda_k \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \, \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{U}}^{-1}$$

Diese Umformung bezeichnet man als <u>Diagonalisierung</u> der Matrix $\underline{\underline{A}}$, da $\underline{\underline{D}}$ Diagonalform hat.

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar!

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnung der Eigenwerte:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenvektoren $\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ nur ein linear unabhängiger Eigenvektor

$\Rightarrow$ nicht diagonalisierbar

<u>Satz</u>

Hermitesche Matrizen (d.h. Matrizen, für die $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$) und reelle symmetrische Matrizen (d.h. reelle Matrizen, für die $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$) sind diagonalisierbar.

Ohne Beweis.

Satz

Eigenwerte hermitescher Matrizen sind reell.

Beweis:

Für hermitesche $\underline{\underline{A}}$ gilt:

$$(\underline{v}^+ \underline{\underline{A}}\, \underline{u})^+ = \underline{u}^+ \underline{\underline{A}}^+ \underline{v} = \underline{u}^+ \underline{\underline{A}}\, \underline{v}$$

Aus $\underline{\underline{A}}\, \underline{u} = \lambda \underline{u}$ folgt dann:

$$(\underline{u}^+ \underline{\underline{A}}\, \underline{u})^+ = (\underline{u}^+ \underline{\underline{A}}\, \underline{u})$$

$$(\underline{u}^+ \lambda\, \underline{u})^+ = \underline{u}^+ \lambda\, \underline{u}$$

$$\lambda^* \langle \underline{u} | \underline{u} \rangle^* = \lambda \langle \underline{u} | \underline{u} \rangle$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^* - \lambda) \langle \underline{u} | \underline{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^*$$

da $\langle \underline{u} | \underline{u} \rangle \neq 0$

Satz

Eigenvektoren hermitischer Matrizen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda\,\underline{u}\,,\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \mu\,\underline{v}\,,\quad \underline{\underline{A}}$ hermitesch $\Rightarrow$

$$(\underline{v}^+ \underline{\underline{A}}\,\underline{u})^+ = \underline{u}^+ \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$$

$$(\underline{v}^+ \lambda\,\underline{u})^+ = \underline{u}^+ \mu\,\underline{v}$$

$$\lambda \cdot \langle \underline{v} | \underline{u} \rangle^* = \mu \cdot \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu) \cdot \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$ für $\lambda \neq \mu$.

Da Eigenvektoren zu entarteten Eigenwerten immer zueinander orthogonal gewählt werden können, kann für hermitesche $n \times n$-Matrizen somit immer ein Satz von n orthonormalen Eigenvektoren $\underline{u}_i$ konstruiert werden.

Also: $\underline{u}_i^+ \cdot \underline{u}_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \underline{\underline{U}}^+ \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{U}}$ unitär