I. Lineare Algebra

1. Vektoren und Vektorräume

1.1. Definition

Gegenstand der vorangegangenen Vorlesung:

Zahlen und Abbildungen von Zahlen auf Zahlen
→ Funktionen

Formalisierung der Rechenregeln für Zahlen
→ Begriff des Körpers

Wiederholung:

1. Schritt: Begriff der Gruppe

Definition der Gruppe
Eine Gruppe besteht aus einer Menge $\mathbb{G} = \{a, b, c, \ldots\}$ und einer Verknüpfungsoperation ("$\circ$") mit folgenden Eigenschaften:

1. Abgeschlossenheit:
   $a, b \in \mathbb{G} \Rightarrow a \circ b \in \mathbb{G}$
2. Assoziativität:
   $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \qquad a, b, c \in \mathbb{G}$
3. Existenz eines neutralen Elements e:
   $a \circ e = a, \qquad e \in \mathbb{G}$, gilt für jedes $a \in \mathbb{G}$
4. Existenz eines Inversen:
   Für jedes $a \in \mathbb{G}$ existiert ein $a^{-1} \in \mathbb{G}$ so daß
   $a \circ a^{-1} = e$.

   Für Abelsche oder kommutative Gruppen gilt zusätzlich:

5. $a \circ b = b \circ a, \qquad a, b \in \mathbb{G}$

Rationale, reelle und komplexe Zahlen ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$):

- Gruppe bezüglich der Verknüpfung "+" (Addition)
  Neutrales Element: $e = 0$

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$: Gruppe bezüglich der Verknüpfung "·" (Multiplikation)
  Neutrales Element: $e = 1$

  (Ausschluß der Null notwendig, da die Null kein multiplikatives Inverses, also $1/0$, besitzt. $1/0$ existiert nicht als Zahl!)

2. Schritt: Begriff des Körpers

Definition des Körpers

Eine Menge $\mathbb{M}$ mit den Verknüpfungen + und · heißt Körper, wenn:

1. $\mathbb{M}$ mit der Verknüpfung + bilden eine Abelsche Gruppe
2. $\mathbb{M}\setminus\{\text{Neutralelement der Addition}\}$ mit der Verknüpfung · bilden eine Abelsche Gruppe
3. Es gilt das Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad x, y, z \in \mathbb{M}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den Verknüpfungen + und sind Körper.

$\Rightarrow$ Mit Elementen eines Köper kann man entsprechend der "normalen" Rechenregeln rechnen.

Jetzt:

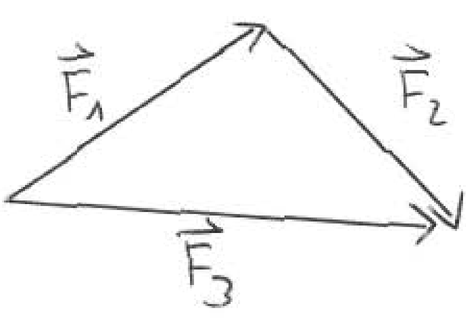
Betrachtung anderer Objekte als Zahlen
→ andere Rechenregeln

Ziel: neue Klasse von Objekten mit gemeinsamen Rechenregeln
→ <u>Vektoren</u>

<u>Beispiele</u>

1.) Objekte mit <u>Richtung und Größe</u>,
z.B. Kräfte in der Physik
oder gerichtete Strecken

Rechenregeln:



$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
definiert die Addition durch „Aneinanderlegen"

$\vec{F}_2 = \lambda \cdot \vec{F}_1$
definiert die Multiplikation mit einer Zahl als Skalierung
bei gleichbleibender Richtung

2.) geordnete n-Tupel von Zahlen

z.B. $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

z.B. Koordinatenwerte zur Beschreibung von Positionen im zwei- oder dreidimensionalen physikalischen Raum

Rechenregeln:

Addition durch Addition der Elemente, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines n-Typels mit einer Zahl durch Multiplikation aller Elemente

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Gemeinsame Struktur:

definiert ist die Addition zwei Elemente und die Multiplikation eines Elements mit einer Zahl

Diese Struktur läßt sich allgemein im Begriff des Vektors und Vektorraums fassen:

Definition:

Eine nichtleere Menge $\mathbb{V}$, für deren Elemente eine Addition (+) und eine Multiplikation ($\cdot$) mit Elementen eines Körper $\mathbb{K}$ definiert sind, heißt <u>Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $V = (\mathbb{V}, +, \cdot)$,</u> wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) Die Menge $\mathbb{V}$ mit der Verknüpfung (+) bildet eine Abelsche Gruppe

(2) Zu jedem $a \in \mathbb{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein $\lambda \cdot a \in \mathbb{V}$

(3) Für $a \in \mathbb{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:
$(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$ (Assoziativgesetz)

(4) Für $a \in \mathbb{V}$ und das Eins-Element 1 des Körpers (d.h. das Neutralelement der Multiplikation) gilt
$1 \cdot a = a$

(5) Für $a, b \in \mathbb{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$$

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$$

Bezeichnungen:
Die Elemente von $\mathbb{V}$ heißen Vektoren. Das neutrale Element von $\mathbb{V}$ bezüglich Addition bezeichnet man als Nullvektor 0.

Neben den beiden schon beschriebenen Beispielen können weitere, nicht immer so offensichtliche gefunden werden. U.a.

3.) Die Menge aller Polynome mit maximalem Grad N, $P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{K}$, bilden einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i \quad , a_i \in \mathbb{K},$$

$$P_2(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i x^i \quad , b_i \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i) x^i$$

und

$$\lambda \cdot P_1(x) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda \cdot a_i) x^i$$

sind ebenfalls solche Polynome

Also sind Addition und skalare Multiplikation für die Menge definiert. Auch die geforderten Rechenregeln gelten.

4.) Die Menge aller reellwertigen Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$

($f_1(x) + f_2(x)$ ist wieder eine solche Funktion, $\lambda \cdot f_1(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls)

Ebenso bilden die Mengen der stetigen, reellwertigen Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ oder der differenzierbaren, reellwertigen Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

5.) Anwendung in der Chemie (Vorgriff TC):

Die Menge der Atom- und Molekülorbitale eines molekularen Systems bildet einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ vgl. LCAO: Addition und skalare Multiplikation von Orbitalen

Definition:

Es sei $V = (\mathbb{V}, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $\mathbb{U}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{V}$. Ist $(\mathbb{U}, +, \cdot)$ ein Vektorraum, so heißt er <u>Untervektorraum</u> von V.

Beispiel:

Betrachte den Vektorraum der Polynome vom Grade N. Die Vektorräume der Polynome vom Grade $M \leq N$ sind dann dessen Untervektorräume.

Anmerkung:

Die Erfüllung der Bedingung, daß $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ und für jedes $a, b \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ auch

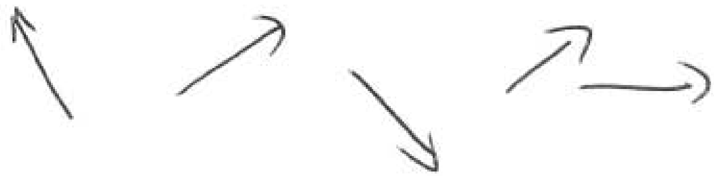
$$a + b \in \mathbb{U} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot a \in \mathbb{U},$$

ist hinreichend um zu zeigen, daß $(\mathbb{U}, +, -)$ ein Untervektorraum von V ist.

1.2. Lineare Abhängigkeit und Basis

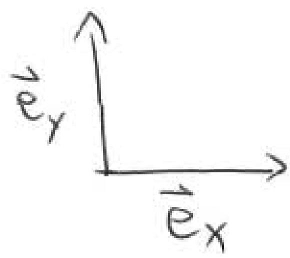
Motivation:

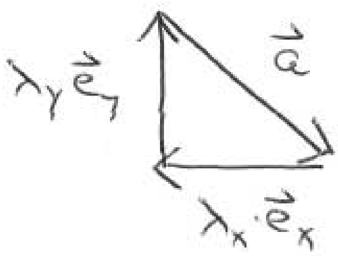
Betrachte gerichtete Strecke (Pfeile) im Zweidimensionalen



Anschaulich ist klar, daß man zwei Grundrichtungen auszeichnen kann und alle Vektoren dann darauf aufgebaut konstruieren kann (→ vgl. Koordinatensystem).

Grundrichtungen





$$\vec{a} = \lambda_x \vec{e}_x + \lambda_y \vec{e}_y$$

Diese Tatsache wollen wir im folgenden mathematisch korrekt und für allgemeine Vektorräume formulieren.

Dabei müssen wir bedenken, daß die Wahl der Grundrichtungen nicht eindeutig ist. Welche Sätze von Vektoren geben mögliche Grundrichtungen?

Dies führt zum Begriff der <u>linearen Unabhängigkeit</u> bzw. <u>linearen Abhängigkeit</u>.

Definition:

Sei K ein Körper, $V = (W, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $v_1, v_2, \dots, v_m \in W$.
Ein Vektor $a \in W$ heißt <u>Linearkombination</u> von $v_1, v_2, \dots, v_m$, wenn es $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt mit

$$V = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

Definition:

Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, v_2, \dots, v_m$

$$\{ \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \}$$

heißt Aufspann oder lineare Hülle von $(v_1, v_2, \dots, v_m)$.

Anmerkung:

Der Aufspan ist ein Untervektorraum von V.

Bezug zur Anfangsmotivation
$\Rightarrow$ Vektoren werden durch die Linearkombination aus einem Satz $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ von Referenzvektoren erzeugt

Die weiterführende Frage,
„Wieviele Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$ sind wirklich nötig und welche sind überflüssig?",
führt jetzt zum Begriff der linearen Unabhängigkeit.

<u>Definition</u>

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$ eines Vektorraums V über K heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0 .$$

Sie heißen <u>linear abhängig</u>, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Bedeutung:

Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existiert ein

$$\lambda_j \neq 0$$

für das

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + \lambda_m v_m$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_m v_m$$

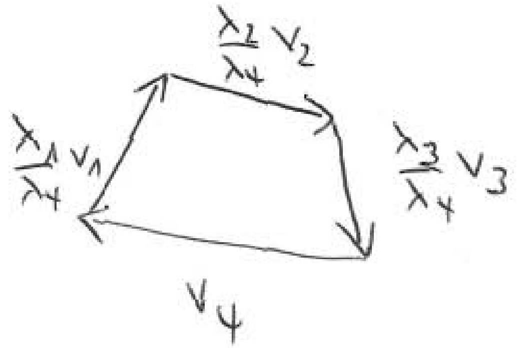
$$v_j = \frac{1}{\lambda_j} \left(\lambda_1 v_1 + \ldots \quad \text{"} \qquad \qquad \text{"} \right)$$

v_j kann dann also als Linearkombination der anderen v_i mit $i \neq j$ aufgebaut werden.

$\Rightarrow$ v_j ist in dem Satz redundant („überflüssig") und kann weggelassen werden ohne den Aufspan zu verändern

Bildlich:

Wähle (v_1, v_2, v_3, v_4) und $j=4$



Die Vektoren bilden einen geschlossenen Kreis, ihre Summe ist also der Nullvektor.

<u>Satz</u>

Sind die Vektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ linear unabhängig, so läßt sich jeder Vektor des Aufspans von $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ <u>in eindeutiger Weise</u> als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_m$ schreiben.

D.h.: Für jeden Vektor a des Aufspans sind die λ_i aus

$$a = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$$

eindeutig bestimmt.

Beweis:

Annahme: 2 verschiedene Darstellungen möglich, also

$$a = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \qquad (\mathrm{I})$$

$$a = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_m v_m \qquad (\mathrm{II})$$

mit $\lambda_i \neq \mu_i$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

$\Rightarrow \quad 0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_m - \mu_m) v_m$

$\Rightarrow (\lambda_i - \mu_i) = 0$ für alle i, da $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ linear unabhängig

$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i$ für alle i Widerspruch!

Anmerkungen:

Fügt man zu einer Menge linear abhängiger Vektoren weitere Vektoren hinzu, so ist die Vereinigungsmenge wieder linear abhängig.

Nimmt man aus einer Menge linear unabhängiger Vektoren Vektoren heraus, so ist die Restmenge wieder linear unabhängig.

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit beantwortet die Frage, ob „überflüssige" Vektoren zum Aufbau einer Linearkombination berücksichtigt wurden.

Nächste Frage: Wieviele Vektoren sind mindestens nötig, um alle anderen Vektoren durch Linearkombination darstellen zu können?
Dies führt zum Begriff des Erzeugendensystems.

<u>Definition</u>

Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißt <u>Erzeugendensystem</u> des Vektorraums V, wenn sich <u>jeder</u> Vektor des Vektorraums V als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ darstellen läßt.
V heißt <u>endlich erzeugt</u>, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gibt, die ein Erzeugendensystem bilden.

Definition

Die Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißt Basis des Vektorraums V, wenn sie linear unabhängig und Erzeugendensystem von V ist.

Bemerkung:

$v_1, \dots, v_n$ ist genau dann eine Basis, wenn sich jeder Vektor in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

schreiben läßt.

Hat man die Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ gegeben, so läßt sich also jeder Vektor eindeutig durch seine Komponenten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis angeben.

Da ein Erzeugendensystem mit einer endlichen Anzahl von Vektoren durch Weglassen von Vektoren immer linear unabhängig gemacht werden kann, muß in jedem endlich erzeugten Vektorraum eine Basis existieren.

Existiert eine Basis mit n Basisvektoren, so ist jede Menge aus mehr als n Vektoren linear abhängig.

(Beweis:

$v_1, \dots, v_n$: Basis

$w_1, \dots, w_{m+n}$: Menge von Vektoren, $m > 0$

$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i$, da $v_1, \dots, v_n$ Basis ist

linear unabhängig?

$$0 = \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j a_{ji} \right)}_{=0 \text{, da } v_1, \dots, v_n \text{ linear unabhängig}} v_i$$

Die $w_1, \dots, w_{n+m}$ sind nur dann linear unabhängig, wenn

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ji} \lambda_j = 0 \quad , i = 1, \dots, n,$$

nur durch $\lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, n+m$, gelöst wird.

Dies sind n Gleichungen zur Bestimmung von $n+m$ Unbekannten λ_j

→ es sollte mehr als eine Lösung existieren, somit $\lambda_j \neq 0$ möglich sein.

Formaler Beweis durch vollständige Induktion bezüglich n.

Verankerung ($n=1$):

$$\sum_{j=1}^{m+1} a_{j1} \lambda_j = 0$$

Wähle j-Sortierung, so daß $a_{11} \neq 0$.

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{m+1} a_{j1} \lambda_j$$

gibt eine Lösung für beliebige $\lambda_j \neq 0$ mit $j = 2, 3, \dots, m+1$

Induktionsschluß von n auf $n+1$:

Wähle Sortierung, so daß $a_{n+m+1\; n+1} \neq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} a_{ji} \cdot \lambda_j = 0 \quad \text{für } i=1,\dots,n \qquad (\mathrm{I})$$

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} a_{j\; n+1} \cdot \lambda_j = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

Aus (II): $\lambda_{m+n+1} = - \dfrac{1}{a_{n+m+1\; n+1}} \sum_{j=1}^{n+m} a_{j\; n+1} \lambda_j$

Einsetzen in (I):

$$\left(\sum_{j=1}^{n+m} a_{ji} \cdot \lambda_j \right) + a_{n+m+1\; i} \cdot \lambda_{m+n+1} = 0$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n+m} a_{ji} \cdot \lambda_j \right) - \frac{a_{n+m+1\; i}}{a_{n+m+1\; n+1}} \sum_{j=1}^{n+m} a_{j\; n+1} \lambda_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left(a_{ji} - \frac{a_{n+m+1\; i}}{a_{n+m+1\; n+1}} a_{j\; n+1} \right) \lambda_j = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat eine Lösung $\lambda_j \neq 0$ für ein j aus $1,\dots,n+m$, da dieses ja gerade die als wahr angenomme Aussage für den n-Fall ist.

Mit (II) folgt daraus die Aussage für den $(n+1)$-Fall, was die Induktion schließt

Die beiden obigen Aussagen lassen sich zusammenfassen zu folgendem Satz:

<u>Satz</u>

Für einen endlich erzeugten Vektorraum gilt:

(a) Eine Basis existiert.

(b) Jede Basis besteht aus der gleichen Anzahl von Basisvektoren.

Dies ermöglicht folgende Definition

<u>Definition</u>

Die Anzahl der Basisvektoren eines endlich erzeugten Vektorraums bezeichnet man als seine <u>Dimension</u>. Nicht endlich erzeugte Vektorräume bezeichnet man als <u>unendlich dimensional</u>.

Damit folgt für Untervektorräume:

<u>Satz</u>

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Es gilt

(a) Die Dimension von U ist kleinergleich der Dimension von V

(b) Sind die Dimensionen von U und V gleich, so sind U und V identisch.

Beispiele von Basen:

kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

andere Basis

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Anwendung z.B. in der Kristallographie:
Die Vektoren die die Elementarzelle aufspannen bilden eine „natürliche" Basis

Mögliche Basis im Raum der Polynome von maximalem Grad n:

$1, x, x^2, \dots, x^n$

Nicht endlich erzeugte Vektorräume haben unendlich viele Basisvektoren.
z.B. Raum aller Polynome
$1, x, x^2, \dots$

1.3. Skalarprodukt

Wir haben Vektoren anschaulich als Objekte mit Länge bzw. Größe und Richtung motiviert. Daher ergibt sich die Frage, wie wir die Länge eines Vektors messen bzw. definieren sollen.
Diese Fragestellung führt zum Begriff der <u>Norm</u> eines Vektors, der die „Länge" oder „Größe" eines Vektors angibt. Welche Bedingungen muß die Norm erfüllen?

Die Norm ergibt sich als Abbildung eine Vektors auf eine reele Zahl

$$v \to f(v) = \|v\|$$

die folgende Bedingunge erfüllen muß:

a.) $\|v\| \geqq 0 \qquad (\|v\| \in \mathbb{R})$

b.) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

c.) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \qquad , \lambda \in \mathbb{K}$

d.) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad , v, w \in \mathbb{V}$

Betrachtet man einen Vektorraum über dem „größten" Körper, $\mathbb{C}$, so ergibt sich für das Quadrat der Norm

$$\|\lambda \cdot v\|^2 = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 = \lambda^* \cdot \lambda \cdot \|v\|^2$$

Dies legt nahe, das Normquadrat mittels eines Produkts $\langle v|w\rangle$ zu konstruieren, das zwei Vektoren v und w eine Zahl $\langle v|w\rangle \in \mathbb{K}$ zuordnet.

Dieses müßte dann die Bedingungen

$$\langle \lambda \cdot v|w\rangle = \lambda^* \cdot \langle v|w\rangle$$
$$\langle v|\lambda \cdot w\rangle = \lambda \cdot \langle v|w\rangle$$

$$\langle v|v\rangle \geqslant 0 \quad (\langle v|v\rangle \in \mathbb{R})$$

erfüllen.

Die beiden ersten Bedingungen sind äquivalent, wenn man zudem

$$\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$$

fordert.

Dann gilt nämlich

$$\langle v|\lambda \cdot w\rangle = \lambda \cdot \langle v|w\rangle$$
$$\Rightarrow \langle \lambda \cdot v|w\rangle = \langle w|\lambda \cdot v\rangle^* = (\lambda \cdot \langle w|v\rangle)^*$$
$$= \lambda^* \langle w|v\rangle^* = \lambda^* \langle v|w\rangle$$

Fordert man als Eigenschaft des Produkts zudem

$$\langle v | w_1 + w_2 \rangle = \langle v | w_1 \rangle + \langle v | w_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_1 + v_2 | w \rangle = \langle w | v_1 + v_2 \rangle^*$$
$$= \left(\langle w | v_1 \rangle + \langle w | v_2 \rangle \right)^*$$
$$= \langle w | v_1 \rangle^* + \langle w | v_2 \rangle^*$$
$$= \langle v_1 | w \rangle + \langle v_2 | w \rangle$$

so gewährleistet diese Eigenschaft auch die Erfüllung der Forderung d.).

Beweis der Aussage:

$$\langle v - \lambda w | v - \lambda w \rangle =$$
$$\langle v | v - \lambda w \rangle - \lambda^* \langle w | v - \lambda w \rangle =$$
$$\langle v | v \rangle - \lambda \langle v | w \rangle - \lambda^* \langle w | v \rangle + \lambda^* \lambda \langle w | w \rangle \geq 0$$

Wähle $\lambda = \frac{\langle w | v \rangle}{\langle w | w \rangle} \Rightarrow$

$$\langle v | v \rangle - \cancel{\frac{\langle w | v \rangle \langle v | w \rangle}{\langle w | w \rangle}} - \cancel{\frac{\langle v | w \rangle \langle w | v \rangle}{\langle w | w \rangle}}$$

$$+ \frac{\langle v | w \rangle \cdot \langle w | v \rangle \cdot \langle w | w \rangle}{\langle w | w \rangle \cdot \langle w | w \rangle} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\langle v | v \rangle \geq \frac{|\langle v | w \rangle|^2}{\langle w | w \rangle}$$

$$\langle v | v \rangle \langle w | w \rangle \geq |\langle v | w \rangle|^2 \Rightarrow \|v\| \cdot \|w\| \geq |\langle v | w \rangle|$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w \mid v+w \rangle \\
&= \langle v|v\rangle + \langle w|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle \\
&\leqslant \langle v|v\rangle + \|v\|\cdot\|w\| + \|v\|\cdot\|w\| + \langle w|w\rangle \\
&\leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 \\
&\leqslant (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

Diese Überlegungen führen zum Begriff des Skalarprodukts.

Definition:

V sei ein Vektorraum über dem Körper K. Eine Abbildung, die zwei Vektoren v, w aus V eine Zahl $f(v,w) = \langle v|w\rangle \in \mathbb{K}$ zuordnet, heißt Skalarprodukt, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

a.) $\langle v|w_1+w_2\rangle = \langle v|w_1\rangle + \langle v|w_2\rangle$

b.) $\langle v|\lambda\cdot w\rangle = \lambda\cdot\langle v|w\rangle$, $\lambda\in\mathbb{K}$

c.) $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$

d.) $\langle v|v\rangle > 0$ für alle $v \neq 0$

(d.h. $\langle v|v\rangle \in \mathbb{R}$ oder Element eines anderen geordneten Körpers)

Ein endlich-dimensionaler Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt <u>Euklidischer Vektorraum</u>.

Die Norm eines Vektors ist dann definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

Schon gezeigt:

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow \frac{|\langle v|w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

Über die Größe $\frac{\langle v|w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$ kann nun für reele Vektorräume der Begriff des <u>Winkels φ</u> zwischen zwei Vektoren v und w eingeführt werden:

$$\cos\varphi = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Sind die Vektoren parallel, so gilt

$$w = \lambda \cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\lambda \cdot \langle v | v \rangle}{\|v\| \cdot |\lambda| \cdot \|v\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = \pi$$

Sind zwei Vektoren senkrecht (orthogonal), so gilt

$$\cos \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v | w \rangle = 0$$

<u>Definition</u>

Zwei Vektoren v und w heißen <u>orthogonal</u>, wenn

$$\langle v | w \rangle = 0$$

Man bezeichnet einen Vektor v als normiert, wenn

$$\| v \| = 1$$

Wie können konkrete Skalarprodukte eingeführt werden?

Für endlich-dimensionale Vektorräume ist ein Skalarprodukt eindeutig durch die Angabe aller Skalarproduktwerte zwischen den Basisvektoren e_i, $i=1,\dots,n$, einer beliebigen (Referenz-) Basis gegeben.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot e_i$$

v_i und w_i sind die Komponenten bzgl. der Basis

$$\Rightarrow \langle v | w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i^* \left\langle e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i^* \, w_j \, \langle e_i | e_j \rangle$$

Man erkennt, daß sich eine besonders einfache Definition des Skalarprodukts ergibt, wenn für die Basisvektoren

$$\langle e_i | e_j \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kronecker-} \\ \text{Symbol}}}{\delta_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gilt. Dann folgt

$$\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i^* w_j \, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i$$

(Da $\langle v|v \rangle = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 > 0$ für $v_i \neq 0$, ist dies wirklich ein Skalarprodukt)

Eine Basis mit der Eigenschaft $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ bezeichnet man als <u>orthonormale Basis</u>.

Für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum kann eine solche Basis konstruiert werden.

Gram-Schmidt-Verfahren

Sei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Basis oder ein linear unabhängiger Satz von Vektoren. Dann ergibt die Rekursion

$$e_1 = \frac{a_1}{\| a_1 \|}$$

$$\left.\begin{aligned} b_i &= a_i - \sum_{j=1}^{i-1} e_j \langle e_j | a_i \rangle \\ e_i &= \frac{b_i}{\| b_i \|} \end{aligned}\right\} \quad i = 2, \ldots, n$$

eine orthonormale Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bzw. einen orthonormalen Satz von Vektoren.

Explizit :

$$e_1 = a_1 / \| a_1 \|$$

$$b_2 = a_2 - e_1 \cdot \langle e_1 | a_2 \rangle$$

$$e_2 = b_2 / \| b_2 \|$$

$$b_3 = a_3 - e_2 \langle e_2 | a_3 \rangle - e_1 \langle e_1 | a_3 \rangle$$

$$e_3 = b_3 / \| b_3 \|$$

$$\vdots$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren kann man einfach mittels vollständiger Induktion verifizieren.

Gilt für die berechneten e_j, $j = 1, 2, \dots, i-1$,

$$\langle e_n | e_j \rangle = \delta_{nj} \quad \text{für } n < i,$$

so folgt wegen

$$\begin{aligned}
\langle e_n | b_i \rangle &= \langle e_n | a_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_n | e_j \rangle \langle e_j | a_i \rangle \\
&= \langle e_n | a_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{nj} \langle e_j | a_i \rangle \\
&= \langle e_n | a_i \rangle - \langle e_n | a_i \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \langle e_n | e_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle e_n | e_j \rangle = \delta_{nj} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, i \text{ und } n < i.$$

Somit $\langle e_n | e_j \rangle = \delta_{nj}$ für beliebige n, j mit $n \leq j$ und daher auch $\langle e_n | e_j \rangle = \delta_{nj}$ für beliebige n, j. Die konstruierte Basis ist also orthonormal

Orthonormalbasen erleichtern das Rechnen mit Vektoren. So können z.B. die Komponenten v_i eines Vektors v bezüglich einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

direkt durch Skalarproduktbildung berechnet werden:

$$\langle e_j | v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \underbrace{\langle e_j | e_i \rangle}_{= \delta_{ji}}$$

$$\Rightarrow \quad v_j = \langle e_j | v \rangle$$

Also

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i | v \rangle$$

Bisher haben wir nur Skalarprodukte in endlich-dimensionalen Vektorräum explizit betrachtet. Dort kann das Skalarprodukt immer über die Darstellung in einer Orthonormalbasis e_i mittels

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad , \quad w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$$

$$\Rightarrow \quad \langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i$$

berechnet werden.

In unendlich-dimensionalen Vektorräumen kann man ähnlich vorgehen, also

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i e_i \quad , \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i e_i$$

$$\Rightarrow \quad \langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^* w_i \quad ,$$

allerdings muß man hier das Problem der Konvergenz der unendliches Summen bedenken. Außerdem kann das Skalarprodukt nicht einfach durch Angabe einer endlichen Zahl von Zahlen $\langle e_i | e_j \rangle$ definiert werden

Beispiel möglicher Skalarprodukte in unendlich-dimensionalen Vektorräumen:

1.) Vektorraum alle komplex-wertigen, beliebig oft differentierbaren Funktion mit $\mathbb{D} = [-1, 1]$.

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} dx \, f(x)^* \, g(x)$$

definiert ein Skalarprodukt, da

- linear
- $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^*$
- $\langle f | f \rangle = \int_{-1}^{1} dx \, |f(x)|^2 > 0$

  für $f(x) \neq 0$

2.) Vektorraum aller stetigen, reelwertigen Funktionen $f(x)$ mit

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{|x|}\, f(x)\right) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{|x|}\cdot f(x)\right) = 0$.

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f(x)\, g(x)$$

definiert ein Skalarprodukt, da

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; f(x)\, g(x)$ existiert

  $\Big(\lim_{x\to\pm\infty} \left(|x| \cdot f(x) \cdot g(x) \right) =$

  $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{|x|} \cdot f(x) \right) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{|x|} \cdot g(x) \right) = 0$

  $\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)$ geht schneller als $\frac{1}{|x|} \to 0$ für $|x| \to \pm\infty$ $\Big)$

- linear

- $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^*$

- $\langle f | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; |f(x)|^2 > 0$ für $f(x) \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |f(x)|^2$ existiert $\Rightarrow$ $f(x)$ quadratintegrabel

$\Rightarrow$ Vektorraum der quadratintegrablen Funktion

2. Determinanten

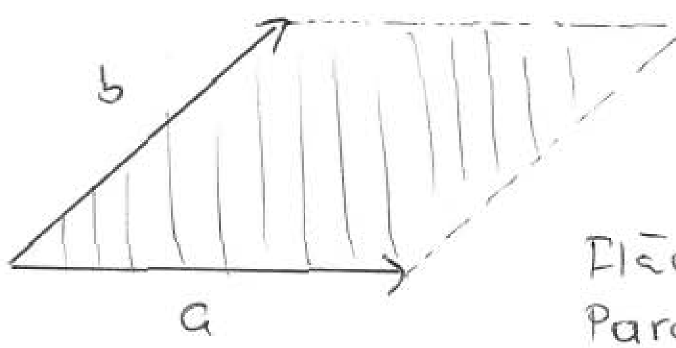
2.1 Flächen- und Volumenmaße

Im letzten Abschnitt: Längenmaß

Andere wichtige Größe → Fläche, Volumen, ...

Motivation

2D: Fläche, die von 2 Vektoren aufgespannt wird

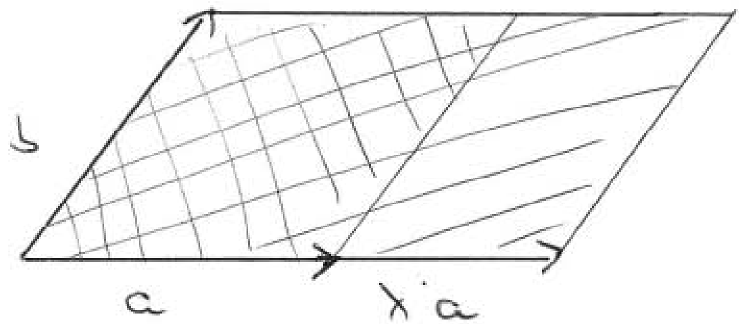


Fläche des Parallelogramms?

Fläche: $A = f(a, b)$

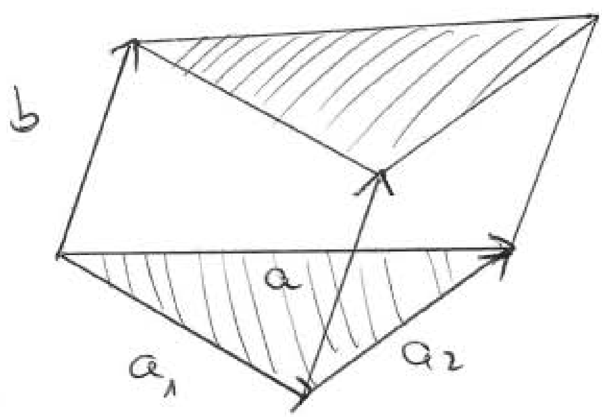
f ist ein Abbildung von zwei Vektoren auf eine Zahl.

Eigenschaften von f?



a.) $f(\lambda \cdot a, b) = \lambda \cdot f(a,b)$

$f(a, \lambda \cdot b) = \lambda \cdot f(a,b)$



b.) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_1, b)$

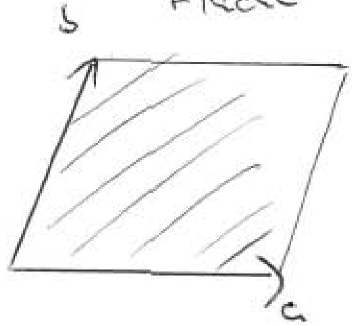
$f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$

wegen:

$$f(0,b) = 0 = f(a - a, b)$$
$$= f(a,b) + f(-a,b)$$

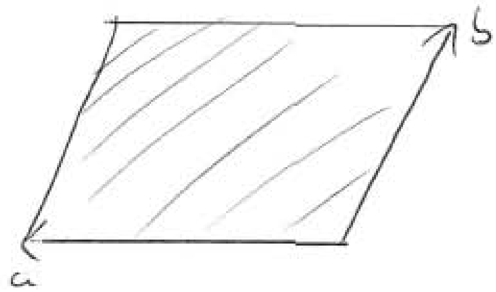
sind die Flächen „gerichtet", also

„positive" Fläche



Anordnung der Vektoren gegen den Uhrzeigersinn

„negative" Fläche



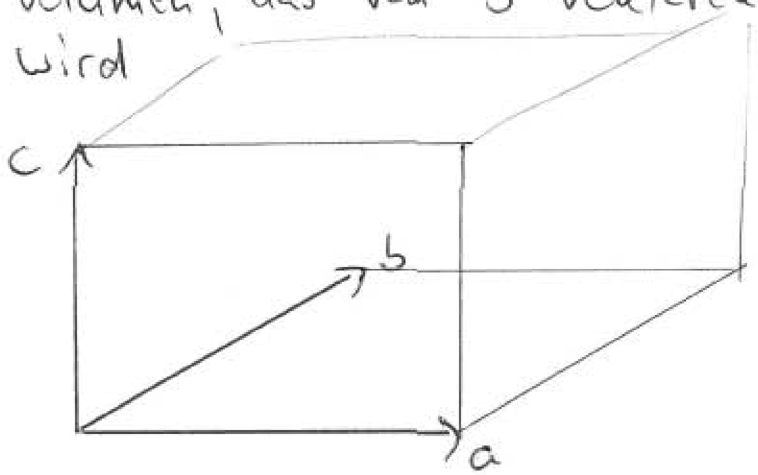
Anordnung der Vektoren mit dem Uhrzeigersinn

$\Rightarrow$ Größe der Fläche gegeben durch $|f(a,b)|$

Damit folgt

c.) $f(a,b) = -f(b,a)$

3D: Volumen, das von 3 Vektoren aufgespannt wird



Volumen $V = f(a,b,c)$

Entsprechende Überlegungen wie beim Flächenmaß führen zu:

a.) $f(\lambda a, b, c) = \lambda f(a, b, c)$

$f(a, \lambda b, c) = \lambda f(a, b, c)$

$f(a, b, \lambda c) = \lambda f(a, b, c)$

b.) $f(a_1 + a_2, b, c) = f(a_1, b, c) + f(a_2, b, c)$

$f(a, b_1 + b_2, c) = f(a, b_1, c) + f(a, b_2, c)$

$f(a, b, c_1 + c_2) = f(a, b, c_1) + f(a, b, c_2)$

c.) „Orientiertes Volumen":

rechtshändig oder linkshändig

$$f(a, b, c) = -f(b, a, c)$$
$$= -f(c, b, a)$$
$$= -f(a, c, b)$$

höherdimensionale Vektorräume: Volumenanalogon

Eigenschaften des Volumenmaßes

a.) $f(x_1, x_2, \ldots, \lambda \cdot x_j, \ldots, x_n) = \lambda\, f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$

b.) $f(x_1, x_2, \ldots, x_j + x_j', \ldots, x_n) =$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, x_j', \ldots, x_n)$

c.) $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann jetzt ein Vorschrift zum Berechnen von Volumina konstruiert werden.

Dazu werden alle Vektoren in einer orthonormalen Basis entwickelt:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vektoren}}}{x_j} = \sum_i \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Komponenten}}}{x_{ij}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Basisvektoren}}}{e_i}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$f\left(\sum_{i_1} x_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} x_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} x_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$

$$\sum_{i_1} x_{i_1 1} \cdot f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2} x_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} x_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} x_{i_1 1} \cdot x_{i_2 2} \cdot \dots \cdot x_{i_n n} \cdot f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

Dies führt die Flächenberechnung auf die Berechnung von Flächen, die durch die Basisvektoren aufgespannt werden, zurück.

Wegen Bedingung c.) muß $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ verschwinden, wenn zwei der Vektoren $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ gleich sind, also zwei der Indizees $i_1, i_2, \dots, i_n$ gleich sind.

Entsprechend ist nur dann $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \neq 0$, wenn der Satz $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_n})$ eine Permutation der Basisvektoren $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ist. Also muß $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ eine Permutation von $(1, 2, \dots, n)$ sein.

Wiederholung: <u>Permutation</u>

Eine eineindeutige Abbildung P_j^n von $\{1, 2, \dots, n\}$ auf $\{1, 2, \dots, n\}$ heißt Permutation.

→ Eine Permutation ist eine Umordnung der geordneten Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$.
Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen P_j^n.

Eine Permutation heißt <u>gerade</u> $(\mathrm{sgn}(P_j^n) = 1)$, wenn sie durch eine gerade Zahl paarweiser Vertauschungen erzeugt wird; sie heißt ungerade, wenn sie durch eine ungerade Zahl paarweiser Vertauschungen erzeugt wird.

Da das Volumenmaß f sein Vorzeichen bei paarweiser Vertauschung ändert, gilt:

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{sgn}(P_j^n) \cdot f(e_{P_j^n(1)}, e_{P_j^n(2)}, \dots, e_{P_j^n(n)})$$

Somit folgt

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$\sum_{j=1}^{n!} x_{p_j^n(1)\,1} \cdot x_{p_j^n(2)\,2} \cdot \ldots \cdot x_{p_j^n(n)\,n}$$

$$\cdot f(e_{p_j^n(1)}, e_{p_j^n(2)}, \ldots, e_{p_j^n(n)}) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n!} x_{p_j^n(1)\,1} \cdot x_{p_j^n(2)\,2} \cdot \ldots \cdot x_{p_j^n(n)\,n} \cdot \mathrm{sgn}(p_j^n) \right) .$$

$$\underbrace{f(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$$

= Einheitsvolumen, wird definitionsgemäß gleich 1 gesetzt

Dies führt zur Definition der Determinante:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Definition

Eine Abbildung von n^2 Zahlen auf eine Zahl gemäß

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{j=1}^{n!} \operatorname{sgn}(P_j^n) \cdot x_{P_j^n(1)\,1} \cdot x_{P_j^n(2)\,2} \cdot \ldots \cdot x_{P_j^n(n)\,n} ,$$

wobei die P_j^n, $j = 1, 2, \ldots, n!$, alle möglichen Permutation von n Zahlen sind, heißt <u>Determinante</u>.

Beispiele:

$n=2$, mögliche Permutationen: $(1,2)$, $(2,1)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11} \cdot x_{22} - x_{21} x_{12}$$

$n=3$, mögliche Permutationen: ...

2.2. Rechnen mit Determinanten

Determinanten haben folgende, schon im Vorherigen Abschnitt für Volumenmaße hergeleitete Eigenschaften:

$$\det\left(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, a_{i+1}, \dots, a_n\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Damit ergibt sich:

$$\det\left(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_n\right) =$$

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}_{= \delta_{ij}} =$$

$$(1 + \lambda_i) \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$\Rightarrow$ Zu einer Determinantenspalte kann das Vielfache einer beliebigen anderen Spalte addiert werden, ohne ihren Wert zu verändern

Determinanten sind symmetrisch bezüglich Vertauschung von Zeilen und Spalten (wurde schon bei der Herleitung des Laplaceschen Entwicklungssatzes genutzt).

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots \\ x_{12} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

→ Alle Operationen, die bisher bezüglich Spalten hergeleitet wurden, gelten äquivalent bezüglich Zeilen.

→ Sind die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots$$

linear unabhängig, so sind auch die Zeilenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots$$

linear unabhängig.

Beweis der Symmetrieeigenschaft:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{P_j^n} \operatorname{sgn}(P_j^n) \cdot x_{P_j^n(1)\,1} \cdot x_{P_j^n(2)\,2} \cdot \ldots \cdot x_{P_j^n(n)\,n} =$$

$$\sum_{P_j^n} \operatorname{sgn}(P_j^n) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{P_j^n(i)\,i}$$

In dem Produkt $\prod_{i=1}^{n} x_{P_j^n(i)\,i}$ kann die Reihenfolge der Faktoren beliebig vertauscht werden,

z.B. $x_{P_j^n(1)\,1} \cdot x_{P_j^n(2)\,2} \cdot x_{P_j^n(3)\,3} =$

$x_{P_j^n(3)\,3} \cdot x_{P_j^n(1)\,1} \cdot x_{P_j^n(2)\,2}$.

Also: $\prod_{i=1}^{n} x_{P_j^n(i)\,i} = \prod_{i=1}^{n} x_{P_j^n(P_a^n(i))\ P_a^n(i)}$

Wählt man P_a^n als die Umkehrpermutation von P_j^n, d.h.

$P_j^n(P_a^n(i)) = i$,

so folgt:

$$\prod_{i=1}^{n} x_{p_j^n(i)\, i} = \prod_{i=1}^{n} x_{i\, p_a^n(i)}$$

$$\mathrm{sgn}(p_j^n) = \mathrm{sgn}(p_a^n)$$

$$\Rightarrow \sum_{p_j^n} \mathrm{sgn}(p_j^n) \prod_{i=1}^{n} x_{p_j^n(i)\, i} =$$

$$\sum_{p_a^n} \mathrm{sgn}(p_a^n) \prod_{i=1}^{n} x_{i\, p_a^n(i)}$$

$\uparrow$

Die Summation über alle p_a^n entspricht der Summation über alle p_j^n, da sich jeweils ein p_a^n und ein p_j^n eindeutig zugeordnet sind.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots \\ x_{12} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Diese Eigenschaften erlauben die systematische Berechnung von Determinanten mittels des <u>Laplaceschen Entwicklungssatzes</u>:

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\left(\text{wobei } a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & 0 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,i-1} & 0 & a_{j-1\,i+1} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ a_{j\,1} & \cdots & a_{j\,i-1} & 1 & a_{j\,i+1} & \cdots & a_{j\,n} \\ a_{j+1\,1} & \cdots & a_{j+1\,i-1} & 0 & a_{j+1\,i+1} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & 0 & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

ziehe $a_{ji} \cdot e_j$ von der i-te Spalte ab

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & 0 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,i-1} & 0 & a_{j-1\,i+1} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j+1\,1} & \cdots & a_{j+1\,i-1} & 0 & a_{j+1\,i+1} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & 0 & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$j-1$

$i-1$ paarweise Vertauschungen

(wird später gezeigt: Zeilenvertauschung analog zu Spaltenvertauschungen möglich)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,i-1} & a_{j-1\,i+1} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ 0 & a_{j+1\,1} & \cdots & a_{j+1\,i-1} & a_{j+1\,i+1} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,i-1} & a_{j-1\,i+1} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ a_{j+1\,1} & \cdots & a_{j+1\,i-1} & a_{j+1\,i+1} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ursprüngliche Determinante, in der die i-te Spalte und j-te Zeile gestrichen wurde

→ Rückführung einer n-dimensionalen Determinante auf (n-1)-dimensionale Determinanten

→ erlaubt rekursive Berechnung von Determinanten

Beispiel:

Determinante im Dreidimensionalen

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} =$$

$$x_{11} \cdot \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{21} \cdot \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{31} \cdot \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{13} \end{vmatrix} =$$

$$x_{11} \cdot (x_{22} x_{33} - x_{32} x_{13}) - x_{21} \cdot (x_{12} x_{33} - x_{32} x_{13})$$

$$+ x_{31} \cdot (x_{12} x_{23} - x_{22} \cdot x_{13}) =$$

$$x_{11} x_{22} x_{33} + x_{21} x_{32} x_{13} + x_{31} x_{12} x_{23}$$

$$- x_{11} x_{32} x_{23} - x_{21} x_{12} x_{33} - x_{31} x_{22} x_{13}$$

Merkregel für 3D-Determinaten (nur 3D!):

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{array} \right.$$

2.3. Kreuzprodukt

Spezielle Struktur im Dreidimensionalen:
Durch die Forderung

$$\det(z, a, b) = \langle z | c \rangle$$

(für beliebiges z)

läßt sich dem Paar von Vektoren a, b ein Vektor $c := a \times b$ zuordnen.

In Komponentendarstellung bezüglich einer Orthonormalbasis (e_1, e_2, e_3) mit $\det(e_1, e_2, e_3) = +1$ ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_1 & b_1 \\ z_2 & a_2 & b_2 \\ z_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3$$

$$z_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - z_2 \cdot (a_1 b_3 - a_3 b_1)$$

$$+ z_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3$$

$$\Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung bezeichnet man als Kreuzprodukt

$$c = a \times b$$

Es gilt aufgrund der Determinanten-eigenschaften:

$$a \times b = - b \times a$$

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \times b = \lambda_1 \cdot (a \times b) + \lambda_2 (a \times b)$$

$$a \times (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 \cdot (a \times b_1) + \lambda_2 (a \times b_2)$$

Charakteristische Eigenschaften:

$$\langle a | a \times b \rangle = \det(a, a, b) = 0$$

$$\langle b | a \times b \rangle = \det(b, a, b) = 0$$

$\Rightarrow a \times b$ orthogonal auf a und b

$$\|a \times b\| = \frac{\|a \times b\|^2}{\|a \times b\|} = \frac{\langle a \times b | a \times b \rangle}{\|a \times b\|} =$$

$$\left\langle \frac{a \times b}{\|a \times b\|} \middle| a \times b \right\rangle = \det\left(\frac{a \times b}{\|a \times b\|}, a, b \right)$$

normierter Vektor senkrecht auf a und b

Der Betrag ist also die Fläche, welche von a und b aufgespannt wird ($\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$)