2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2024, 13.09.2024

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum, der von den Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aufgespannt wird, wobei

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle$.
   b) Für welche α bilden $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
   c) Geben Sie die Norm von $\mathbf{v}_1$ an.
   d) Normieren Sie $\mathbf{v}_1$.

(4 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx},$$

mit $c_n \in \mathbb{C}$ und das Skalarprodukt

$$\langle p | q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; p^*(x)\, q(x)\,.$$

   a) Sei $g(x) = e^{-ikx}$ und $h(x) = e^{-ik'x}$ mit $k, k' \in \mathbb{N}$ und $k, k' > 0$. Bestimmen Sie $\langle g | h \rangle$.
   b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums $\mathcal{F}$ an.
   c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums $\mathcal{F}$.

(6 Punkte)

3. Gegeben seien die 3×3-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. $\mathbf{A}$ ist hermitesch und regulär und besitzt die Eigenwerte a_1, a_2 und a_3, $\mathbf{B}$ ist unitär. Bestimmen Sie

   a) $\det(\mathbf{A})$,
   b) $\frac{\det\left(\mathbf{B}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{B}\right)}{\det(\mathbf{A})}$,
   c) $\mathrm{Spur}(\mathbf{A})$,
   d) $\mathrm{Spur}\left(\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger \mathbf{A}^{-1}\right)$,
   e) $|\det(\mathbf{B})|$.

(4 Punkte)

4. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle zur Matrix $\mathbf{H}$ gehörenden Eigenwerte.
   b) Bestimmen Sie den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert.
   c) Ist die Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie!

(7 Punkte)

5. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   a) Bestimmen Sie $\det(\mathbf{H})$.
   b) Bestimmen Sie $\mathbf{H}^{-1}$ für $\alpha = \beta \neq 0$.
   c) Bestimmen Sie $\det(\mathbf{H}^{-1})$ für $\alpha = \beta \neq 0$.

(7 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$.
   a) Bestimmen Sie ∇f.
   b) Bestimmen Sie die Matrix der zweiten Ableitungen (Hesse-Matrix) von f.
   c) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ein stationärer Punkt von f ist.
   d) Bestimmen Sie die Art des stationären Punktes.
   e) Entwickeln Sie f in einer Taylorreihe um den Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bis zur 2. Ordnung.

(10 Punkte)

7. Betrachten Sie das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathbf{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

entlang des Weges $\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau \cos(\tau \cdot \pi) \\ \tau \cdot \sin(\tau \cdot \pi) \end{pmatrix}$, $\tau \in [0, 1]$. (6 Punkte)

Viel Erfolg!