1. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2024, 26.07.2024

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V}$, der von den Funktionen

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1-\alpha \\ f_1(x) &= x-1 \\ f_2(x) &= x^2-x \\ f_3(x) &= x^3-x^2 \end{aligned}$$

aufgespannt wird.

   a) Für welche Werte von α sind die Vektoren f_i linear unabängig?

   b) Welche Dimension hat der Vektorraum?

   c) Geben Sie für den Fall $\alpha = 1$ eine Basis von $\mathcal{V}$ an!

(3 Punkte)

2. Gegeben sei die Menge der komplexen 2×2-Matrizen mit Spur 0. Sie bildet bezüglich der Matrizenaddition und der Multiplikation mit komplexen Zahlen einen Vektorraum $\mathcal{V}$ über $\mathbb{C}$. Das Skalarprodukt sei definiert durch $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \text{Spur}\left\{\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\right\}$. $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ und $\mathbf{B}_3$ seien Elemente dieser Menge mit

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie $\langle \mathbf{B}_1|\mathbf{B}_1\rangle$, $\langle \mathbf{B}_2|\mathbf{B}_2\rangle$ und $\langle \mathbf{B}_1|\mathbf{B}_2\rangle$.

   b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2\}$ für den von $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ aufgespannten Unterraum $\mathcal{U}$.

(7 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} z-i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } z \in \mathbb{C}$$

Ausserdem sei $\mathbf{C}$ symmetrisch und nicht invertierbar und $\mathbf{D}$ unitär. Bestimmen Sie:

   a) $\det\mathbf{A}$

   b) Ist $\mathbf{A}$ unitär? Begründen Sie!

   c) Für welche z ist $\mathbf{B}$ hermitesch?

   d) $|\det\{\mathbf{C}\mathbf{D}^*\mathbf{B}\}|$

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie die Kinetik der chemischen Reaktion zweier Substanzen A und B, die sich mit der Reaktionsgleichung

$$\mathrm{A} \underset{k_R}{\overset{k_H}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}$$

beschreiben lässt. Die zeitabhängigen Konzentrationen der einzelnen Stoffe $c_A(t)$ und $c_B(t)$ genügen dann dem Differentialgleichungssystem (DGL)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} &= -k_H c_A + k_R c_B \\ \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}t} &= k_H c_A - k_R c_B \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGLs. (10 Punkte)

5. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy^2} & \text{für } x \neq 0 \ \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

mit dem Definitionsbereich $x, y \in \mathbb{R}$.
Ist $f(x,y)$ stetig über den Definitionsbereich? (Begründung!) (3 Punkte)

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \left(xy^2 - x\right) \cdot e^y.$$

Bestimmen Sie Lage und Art der stationären Punkte von f. (9 Punkte)

7. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) e^{-y^2}.$$

Entwickeln Sie f in einer Taylorreihe bis zur 2. Ordnung um den Punkt $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.
(7 Punkte)

8. Berechnen Sie, sofern sie existieren, folgende Integrale oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.

a)

$$I_1 = \lim_{y \to 1} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\pi}^{-\pi} \mathrm{d}x \, \frac{\cos\left(yx^2\right)}{x^2}$$

b)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; e^{-x^2-y^2}$$

Hinweis:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}\zeta \; \zeta e^{-\zeta^2} = \frac{1}{2}$$

(6 Punkte)

Viel Erfolg!