2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2023, 08.09.2023

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum aller reellen 2×2-Matrizen. Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, ob $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ linear unabängig oder linear abhängig sind.
(2 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum der Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{2} c_n \mathrm{e}^{inz} + c_3 \sin z,$$

wobei $c_n \in \mathbb{C}$ mit $n = 0, 1, 2, 3$. Ein Skalarprodukt sei gegeben durch

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \ f^*(\vartheta)\, g(\vartheta).$$

   a) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.
   b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums an.
   c) Geben Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums an.

(6 Punkte)

3. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times 1}$ aller reellen $n \times 1$ Matrizen (Spaltenvektoren) und die $n \times n$ Matrizen, die lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ auf $\mathbb{R}^{n\times 1}$ darstellen. Gegeben sei ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = 1$ und die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{E} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T$, wobei $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix ist.

   a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$.
   b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.
   c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert
   d) Betrachten Sie einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, für den gilt $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u} = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Vektor ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist und geben Sie den zugehöringen Eigenwert an.

(6 Punkte)

4. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ und $\det(\mathbf{ABBAAB})$. (4 Punkte)

5. Betrachten Sie die Kinetik der chemischen Reaktion zweier Substanzen A und B, die sich mit der Reaktionsgleichung

$$\mathrm{A} \underset{k_R}{\overset{k_H}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}$$

beschreiben lässt. Die zeitabhängigen Konzentrationen der einzelnen Stoffe $c_A(t)$ und $c_B(t)$ genügen dann dem Differentialgleichungssystem (DGL)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} &= -k_H c_A + k_R c_B \\ \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}t} &= k_H c_A - k_R c_B \end{aligned}$$

   a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGLs.
   b) Bestimmen Sie für $c_A(0) = c_0$ und $c_B(0) = 0$ den Grenzfall von $t \to \infty$.

(13 Punkte)

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy^2} & \text{für } x \neq 0 \ \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

mit dem Definitionsbereich $x, y \in \mathbb{R}$.
Ist $f(x,y)$ stetig über den Definitionsbereich? (Begründung!) (3 Punkte)

7. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   a) Ist der Punkt $(1,0)$ ein stationärer Punkt?
   b) Geben Sie die Hessematrix am Punkt $(1,0)$ an.
   c) Geben Sie die Taylorreihe zweiter Ordnung um den Punkt $(1,0)$ an.

(11 Punkte)

Viel Erfolg!