1. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2023, 21.07.2023

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum W, der durch die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ aufgespannt wird.
   Das zu W gehörende Skalarprodukt ist gegeben durch $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \cdot j \cdot (j+1)$.
   a) Welche Dimension hat der Vektorraum W?
   b) Gegeben ist $\mathbf{q} = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$. Bestimmen Sie $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{q} \rangle$.
   c) Normieren Sie $\mathbf{q}$. (5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Hilbertraum V, dessen Basis gegeben ist durch $n_1(x) = x$, $n_2(x) = (x-1)(x-2)$ und $n_3(x) = x^3$. Das zugehörige Skalarprodukt sei

$$\langle f | g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

   a) Normieren Sie n_2.
   b) Welche der Funktionen n_1, n_2 und n_3 sind jeweils orthogonal zueinander?
   c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V.

   (7 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{3\times3}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } m \in \mathbb{C}$$

   Bestimmen Sie:
   a) $\det \mathbf{A}$
   b) Ist $\mathbf{A}$ unitär? Begründen Sie!
   c) Für welche m ist $\mathbf{B}$ hermitesch?
   d) $\operatorname{tr} \mathbf{B}$
   e) $\det\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger\right)^{-1} \mathbf{A}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{B}\mathbf{A}\right)$.

   (5 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4x4}$ sowie der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

c) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, für den $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ erfüllt ist.

d) Ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Begründen Sie!

(9 Punkte)

5. Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-x^2}$$

a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

b) Bestimmen Sie, ob es sich bei den Stationären Punkten um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

c) Entwickeln Sie f in einer Taylorreihe um $(-1, 0)$ bis zur 2. Ordnung.

(12 Punkte)

6. Bestimmen Sie den Wert der folgenden Ausdrücke, oder stellen Sie begründet deren Nichtexistenz fest.

a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}y \left(\frac{\sin^3 x}{\ln y} + y\right)$$

b)

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \, \frac{y}{\sin x}$$

(5 Punkte)

7. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\zeta \, f(\zeta) = \frac{\pi^2}{4}$. Bestimmen Sie den Wert von A mit

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, f(x - y) \, f(x + y) \, .$$

Hinweis: Nutzen Sie als Substitution $u = x + y$, $w = x - y$.

(4 Punkte)

Viel Erfolg!