2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2022, 09.09.2022

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sowie die Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   Der Vektorraum sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

   a) Normieren Sie $\mathbf{v_2}$.

   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v_1} | \mathbf{v_2} \rangle$. Für welches b sind $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ orthogonal?

   c) Für welche a, b sind die Vektoren $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ linear abhängig? (6 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum F der Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=-1}^{2} c_n \cdot \mathrm{e}^{inx}$$

   mit $c_n \in \mathbb{C}$. Das Skalarprodukt $\langle f|g \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; f^*(x) g(x).$$

   a) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.

   b) Welche der folgenden Funktionen sind Elemente des Vektorraumes? (Begründung!)

      i. $u_1(x) = i \cdot \sin(x)$

      ii. $u_2(x) = \sin(2x)$

      iii. $u_3(x) = \cos(2x) + i \cdot \sin(2x)$

   c) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle e^{inx} | e^{imx} \rangle$ für $n, m \in \mathbb{Z}$.
   Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung durch.

   d) Geben Sie eine orthonormale Basis des Vektorraumes F an. (7 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4\times4}$ und $\mathbf{C}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{4\times4}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ hermitesch, $\mathbf{B}$ unitär, $\mathbf{C}$ symmetrisch und für $\mathbf{E}$ gilt $E_{ij} = \delta_{ij}$.
   Berechnen beziehungsweise vereinfachen Sie

   a) $\det(\mathbf{E} + \mathbf{E})$

   b) $\det(\mathbf{CAB}) \cdot \det\left(\mathbf{A^{-1}B^{\dagger}C}^T\right)$ (3 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 2 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{H}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$.
   c) Ist die Matrix invertierbar? Begründen Sie!
   d) Ist die Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie! (10 Punkte)

5. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy^2} & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

   mit dem Definitionsbereich $x, y \in \mathbb{R}$.
   Ist $f(x,y)$ stetig über den Definitionsbereich? (Begründung!) (3 Punkte)

6. Betrachten Sie folgende Funktion

$$f(x,y) = \ln(x-1) \cdot (3-y)^2,$$

   wobei $x > 1$ gilt.

   a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.
   b) Zeigen Sie, dass $(2,3)$ ein stationärer Punkt der Funktion f ist. Diskutieren Sie die mögliche Art des stationären Punktes. (11 Punkte)

7. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = e^{z^2(x+y)}$$

   in eine Taylorreihe bis zur 6. Ordnung um den Punkt $x = 1, y = -1, z = 0$.
   Hinweis: Vermeiden Sie, wenn möglich, die Berechnung von Ableitungen.
   (4 Punkte)

8. Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbf{\Gamma}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= e^{xy}\, (x,y)^T, \end{aligned}$$

   wobei entlang des durch $\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda, -\lambda)^T$ mit $\lambda \in [0,1]$ gegebenen Weges integriert werden soll. (6 Punkte)

Viel Erfolg!