1. Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2022, 22.07.2022

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sowie die Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Der Vektorraum sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

a) Geben Sie die Dimension des Untervektorraumes, der von den Vektoren $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$ aufgespannt wird, in Abhängigkeit von α an.

b) Zeigen Sie, dass für $\alpha = 1$ die Vektoren $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ orthogonal sind.

c) Sei $\alpha = 1$. Konstruieren Sie eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$, die die Vektoren $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ als Basisvektoren enthält. (7 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum V der 3×3-Matrizen über $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}\right).$$

Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \mu \\ 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

a) Berechnen Sie die Norm von $\mathbf{A}$.

b) Für welche λ, μ ist $\mathbf{A}$ hermitesch?

c) Betrachten Sie $\lambda = 0$. Für welche μ ist $\mathbf{A}$ unitär? (6 Punkte)

3. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{H}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten.

c) Gibt es entartete Eigenwerte? Falls ja, geben Sie den Grad der Entartung an.

d) Ist die Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie! (8 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & 0 \\ -i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gelte zudem die Matrixgleichung

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger,$$

wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix ist.

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

b) Die Matrix $\mathbf{U}$ kann so gewählt werden, dass $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$. Warum?

c) Berechnen Sie $\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1})$.

d) Berechnen Sie $\det(\mathbf{D})$ unter der Voraussetzung aus Aufgabenteil b).

(7 Punkte)

5. Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 yz + x \sin(z).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass $(2, -2, 0)$ ein stationärer Punkt der Funktion f ist. Bestimmen Sie zusätzlich die Art des stationären Punktes.

c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe bis zur Ordnung 4 um den Entwicklungspunkt $(1, 0, 0)$.
Hinweis: $sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + ...$

(14 Punkte)

6. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; e^{-\alpha\left(x^2+y^2\right)} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$$

(6 Punkte)

Viel Erfolg!