2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2021, 17.09.2021

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{C}^3$, sowie die Vektoren

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{c} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

   Der Vektorraum sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

   a) Für welche α, β sind die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ linear unabhängig?

   b) Sind die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal zueinander?

   c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ normiert sind.

   d) Geben Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{C}^3$ an, die $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ enthält.

   (10 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum V der 3×3-Matrizen über $\mathbb{C}$, der mit dem Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^* b_{ij},$$

   ausgestattet ist. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

   mit den Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

   a) Berechnen Sie die Norm von $\mathbf{A}$.

   b) Für welche λ, μ ist $\mathbf{A}$ hermitesch?

   Betrachten Sie im Folgenden nurnoch hermitesche $\mathbf{A}$

   c) Für welche λ, μ ist $\mathbf{A}$ zusätzlich unitär?

   d) Bestimmen Sie für alle $\mathbf{A}$, die sowohl hermitesch als auch unitär sind die inverse Matrix.

   (7 Punkte)

3. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -i & -2i \\ i & 2 & -2 \\ 2i & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{E}$ durch ± 1 gegeben sind.

b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ von $\mathbf{E}$. Geben Sie an, ob es entartete Eigenwerte gibt. Wenn ja, dann geben Sie auch den Entartungsgrad an.

c) Wie viele der bestimmten $\mathbf{x}_i$ können Sie jeweils orthogonal zueinander wählen? Begründen Sie ihre Antwort. (9 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie den Vektor

$$\mathbf{r} = \left(18, 12, 20, 16\right)^T .$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\mathbf{F}$ invertierbar?
Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall $\alpha = 1$.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4$, der $\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ erfüllt.

c) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$, der $\mathbf{y} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{r}$ erfüllt. (6 Punkte)

5. Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(y, z) = -\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y+2)^2 + z^2}}.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten am Punkt $(1, 0)$, sowie den Funktionswert der Funktion f am Punkt $(1, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $(-1, 0)$ ein stationärer Punkt von f ist und bestimmen Sie die Art von diesem.

c) Entwickeln Sie f in einer Taylorreihe bis zur 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 0)$. (11 Punkte)

6. Bestimmen Sie die Werte der angegebenen Ausdrücke oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.

a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \int_{-L}^{L} \mathrm{d}y \; x y e^{-x^2-y^2}$ mit $L > 0$

b) $\displaystyle\lim_{L\to\infty} \lim_{k\to 0} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \int_{-k}^{k} \mathrm{d}y \; e^{-x^2-y^2}$, (3 Punkte)

7. Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbf{\Gamma}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-y, x\right)^T, \end{aligned}$$

wobei entlang des durch $\mathbf{\Gamma} = (\cos\eta, \sin\eta)^T$ mit $\eta \in [0, 2\pi]$ gegebenen Weges integriert werden soll. (4 Punkte)

Viel Erfolg!