1. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2021, 26.07.2021

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: NUMMER

1. Betrachten Sie den Vektorraum W der reellen, symmetrischen 2×2-Matrizen. Dieser sei mit dem Skalarprodukt
$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}\right)$$
ausgestattet. Sei eine Menge von Matrizen gegeben durch
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Welche der gegebenen Matrizen liegen in W?
   b) Welche Dimension hat der Vektorraum W?
   c) Geben Sie eine Basis von W an. (3 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum V, der durch die Funktionen $n_1(x) = 1$, $n_2(x) = x$ und $n_3(x) = x^3$ aufgespannt wird. Dieser sei mit dem Skalarprodukt
$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}$$
ausgestattet.
   a) Normieren Sie n_2.
   b) Sind die Funktionen n_1, n_2 und n_3 jeweils orthogonal zueinander?
   c) Bestimmen Sie eine Funktion g, die orthogonal zu n_1 und n_2 ist und in V liegt.

   Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Beziehungen für $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n e^{-x^2}$:
   $I_0 = \sqrt{\pi}$, $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I_3 = 0$, $I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, $I_5 = 0$, $I_6 = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$, $I_7 = 0$, $I_8 = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$
   (7 Punkte)

3. Gegeben seien die $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. Dabei ist $\mathbf{A}$ unitär, $\mathbf{B}$ invertierbar, $\mathbf{C}$ hermitesch und invertierbar. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie
   a) $\det\left(\lambda \mathbf{A}^\dagger \left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{B}\right)$,
   b) $\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger - \mathbf{C}\mathbf{B}\right)$. (4 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle zur Matrix $\mathbf{H}$ gehörenden Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren.

b) Ist die Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie! (4 Punkte)

5. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie die Matrizen $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$, falls diese existieren. Geben Sie an, für welche $s \in \mathbb{R}$ die Inversen gültig sind. (7 Punkte)

6. Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten am Punkt $(1, 0)$, sowie den Funktionswert der Funktion f am Punkt $(1, 0)$.

b) Bestimmen die Richtungsableitung von f in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$ am Punkt $(1, 0)$.

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $(-1, 0)$ ein stationärer Punkt von f ist und bestimmen Sie die Art von diesem.

d) Entwickeln Sie f in einer Taylorreihe bis zur 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 0)$. (12 Punkte)

7. Bestimmen Sie den Wert der folgenden Ausdrücke, oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.

a) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{69}^{420} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-i\alpha x}}{x}$, wobei $\alpha > 0$

b) $\displaystyle \lim_{L \to \infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \int_0^y \mathrm{d}z \, x^4 \cdot e^{Lx}$

c) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, f(x-y) \, f(x+y)$, wobei $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \, f(\xi) = \pi$

(6 Punkte)

Viel Erfolg!