2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2020, 10.9.2020

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.

Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum V der Funktionen

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} + c_3 e^{2ix} + c_4 e^{-2ix}$$

mit $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$. Das Skalarprodukt $\langle f|g \rangle$ in diesem Raum sei definiert durch

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f^*(x) \cdot g(x).$$

Die Funktionen $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = e^{ix}$, $f_2(x) = e^{-ix}$, $f_3(x) = e^{2ix}$, $f_4(x) = e^{-2ix}$ bilden eine orthogonale Basis in diesem Raum.

a) Normieren Sie die oben genannte Basis $f_0(x), \ldots, f_4(x)$.

b) Ist die Funktion $\cos(2x) \in V$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Der Unterraum W enthält alle Funktionen in V für die gilt: $f(-x) = f(x)$. Welche Dimension hat W? Begründen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum U der Matrizen der Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a+b & c & 0 \\ c & a+b & d \\ 0 & d & a-b \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

a) Geben Sie eine Basis des Vektorraums an.

b) Für den Vektorraum U sei ein Skalarprodukt

$$\langle M|N \rangle = \mathrm{tr}\big(\mathbf{M}^\dagger \mathbf{N}\big),\ M, N \in U$$

definiert. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums.

(9 Punkte)

3. Betrachten sie die 4×4 Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{R}$.

   b) Bestimmen Sie den Eigenvektor zu einem nicht-entarteten Eigenwert von $\mathbf{R}$.

   c) Welche Eigenwerte hat die inverse Matrix $\mathbf{R}^{-1}$?

(11 Punkte)

4. Betrachten Sie die komplexwertige Funktion

$$f(x, y) = \cos(x + y - \pi).$$

Entwickeln Sie die Funktion um den Punkt $(0, \pi)$ in eine Taylorreihe bis in vierte Ordnung. (7 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{x^2+y^2+2} - e^3 x^2$$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

   b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

   c) Bestimmen Sie die Art des stationären Punktes $(1, 0)$.

(11 Punkte)

6. Betrachten Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\left(e^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des Weges $\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}$, wobei $\tau \in [0, \phi]$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals in Abhängigkeit von $\phi \in \mathbb{R}$.

(5 Punkte)

Viel Erfolg!