Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2020, 29.7.2020

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.

Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Geben Sie die Dimension des von den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ aufgespannten Untervektorraums in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle$.

   c) Sei $\alpha = 1$. Kann $\beta \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ orthogonal sind? Begründen Sie.

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie einen euklidischen dreidimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

stellt eine lineare Abbildung von V nach V dar. $\mathbf{A}$ hat die Eigenwerte 3 und 0. Bestimmen Sie einen vollständigen orthonormalen Satz von Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. (9 Punkte)

3. Gegeben seien die reellen 4×4 Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ und die komplexen 4×4 Matrizen $\mathbf{B}, \mathbf{D}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ selbstadjungiert, $\mathbf{B}$ orthogonal, $\mathbf{C}$ symmetrisch aber nicht invertierbar, $\mathbf{D}$ unitär. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\mathbf{BAC} - \mathbf{B}(\mathbf{CA})^\dagger$

   b) $(\mathbf{AB}(\mathbf{CB})^T)^\dagger \mathbf{A}^{-1}$

   c) $|\det(\mathbf{D}^* \mathbf{ABDC})|$

(6 Punkte)

4. Gegeben sie die reelle 4×4 Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

(6 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \left(x + 2y^2\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y)$.
c) Entwickeln sie f um den Punkt $(-1,1)$ in einer Taylorreihe zweiter Ordnung.
d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(1,0)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(14 Punkte)

6. Berechnen Sie, sofern diese existieren, folgende Integrale oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.

a)
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \frac{xe^{-x^2}}{3y^2}$$

b)
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{z^2-1} \mathrm{d}r\, r$$

c)
$$\lim_{x\to 1} \lim_{z\to 0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\ln(2)}^{\infty} \mathrm{d}y\, \frac{1}{y+z} e^{-yx^2}$$

(8 Punkte)

Viel Erfolg!