2. Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2019, 9.9.2019

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.

Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Raum V der Funktionen
$$f(x) = c_1 e^{ix} + c_2 + c_3 e^{-ix} + c_4 e^{2ix} + c_5 e^{-2ix}$$
mit $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Bestimmen Sie die Dimensionalität der folgenden Untervektorräume.
   a) $f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
   b) $f(x) = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 e^{ix},\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$

(3 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2 Matrizen mit dem Skalarprodukt
$$\langle A|B\rangle = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{jk} b_{jk}.$$
Gegeben seien die Matrizen A, B, C mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle A|C\rangle$.
   b) Normieren Sie die Vektoren A und B.
   c) Betrachten Sie den Vektorraum U, der von den Matrizen A, B, C aufgespannt wird. Geben Sie die Dimensionalität von U und eine orthonormale Basis von U an.

(10 Punkte)

3. Gegeben seien die (reellen) Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ orthogonal, $\det(\mathbf{B}) = 1$ und $\mathbf{C}$ nicht invertierbar. Berechnen Sie
   a) $\det\big((\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}\mathbf{A}^\dagger\big)$
   b) $\det(\mathbf{ABA})$

(4 Punkte)

4. Geben Sie den Raum, den die Lösungen $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufspannen, an. (4 Punkte)

5. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ von $\mathbf{L}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum, den die Eigenvektoren zu den Eigenwerten i und $-i$ aufspannen.

(10 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xe^{\left(\frac{1}{2}y^2 + y - x + 2\right)}$$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y)$
   c) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem Punkt $(1,-1)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
   d) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um den Punkt $(1,-1)$ bis zur 2. Ordnung.

(16 Punkte)

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$R = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{x}\, \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

entlang des Weges $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ -r\sin(t) \end{pmatrix}$ mit t von 0 bis 2π, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

(6 Punkte)

Viel Erfolg!