Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2019, 23.7.2019

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.

Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Geben Sie die Dimension des von den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ aufgespannten Untervektorraums in Abhängigkeit von α an. Begründen Sie Ihre Antwort.

   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle$

   c) Für welche α sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ orthogonal?

(7 Punkte)

2. Betrachten Sie den Raum V der Funktionen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k g_k(x)$$

mit $g_1(x) = e^{ix}, g_2(x) = 1, g_3(x) = e^{-ix}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Gegeben sei eine lineare Abbildung A von V auf V mit

$$f(x) \to \tilde{f}(x) = f(-x)$$

   a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{A}$ der Abbildung A bezüglich der Basis $(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$.

   b) Bestimmen Sie die Dimensionalität des Raums, der von den Bildern aufgespannt wird.

   c) Ist die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie.

(7 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{4\times4}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ nicht invertierbar, $\mathbf{B}$ orthogonal und $\mathbf{C}$ symmetrisch. $\mathbf{D}$ ist hermitesch und hat die Eigenwerte 1, 2, -2, -1. Berechnen Sie

   a) $\mathbf{B}(\mathbf{D}\mathbf{B})^\dagger \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{A}) - \mathbf{C}$

   b) $\det((\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{A})$

   c) $\det(\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{C})^{-1})$

   d) $\mathrm{Spur}(\mathbf{C}(\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1})^\dagger)$

(9 Punkte)

4. Bestimmen Sie den Raum, den die Lösungen $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems aufspannen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

5. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \mathbb{C}$ von $\mathbf{R}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum, den die Eigenvektoren zu den Eigenwerten i und $-i$ aufspannen.

(10 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \left(\frac{1}{2}y^2 + y - x + 2\right) e^x$$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y)$
   c) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(\frac{1}{2}, -1)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
   d) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um den Punkt $(\frac{1}{2}, -1)$ bis zur 2. Ordnung.

(16 Punkte)

7. Berechnen Sie, sofern diese existieren, folgende Integrale oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.

   a)
$$\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\alpha z} \mathrm{d}r\, r \text{ für } \alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

   b)
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x}{y^2}$$

   c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \text{ für } \sigma > 0, \sigma \in \mathbb{R}$$

(14 Punkte)

Viel Erfolg!