Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2018, 10.09.2018

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen. Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Auf diesem Raum sei das Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

   definiert, wobei die Vektoren als Spaltenvektoren, d.h. 3×1 Matrizen geschrieben sind.

   a) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Normieren Sie $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum F der Funktionen mit $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}^{-inx}$$

   mit $c_n \in \mathbb{C}$. Das Skalarprodukt $\langle f|g\rangle$ der Funktionen $f, g \in \mathrm{F}$ ist gegeben durch

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; f^*(x) g(x).$$

   a) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.

   b) Geben Sie eine beliebige Basis des Vektorraums an.

   c) Gegeben seien $t(x) = \mathrm{e}^{-ikx}$ und $h(x) = \mathrm{e}^{-imx}$ mit $k, m \in [0, N]$. Bestimmen Sie $\langle t|h\rangle$.

   d) Geben Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums an.

(7 Punkte)

3. Gegeben seien die $\mathbb{C}^{n\times n}$-Matrizen **A**, **B** und **C**. **A** und **B** seien unitär. Außerdem gelte: $\det(C) = 1$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

   a) $\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \mathbf{A}^{-1}$

   b) $\mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{-1} \mathbf{A}$

   c) $\det(\mathbf{AC}) \cdot \det(\mathbf{A})^*$

(7 Punkte)

4. Gegeben sei die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert (-2).
   c) Ist der Eigenwert (-2) entartet? Begründen Sie.

(8 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xye^{x-y}$
   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Bestimmen Sie die Lage aller stationären Punkte der Funktion.
   c) Stellen Sie für einen beliebigen stationären Punkt fest, ob es sich bei diesem Punkt um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
   d) Entwickeln Sie die Funktion in eine Taylorreihe um $(1,1)$ bis zur 2. Ordnung.

(16 Punkte)

6. Berechnen Sie

$$I = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-1}^{1} dy \int_{|\epsilon|}^{1} dx \, \frac{y}{x}$$

(2 Punkte)

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C d\underline{x}\, \underline{f}\,(\underline{x})\,,$$

   wobei $\underline{f}\,(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Kurve C durch $\underline{x}\,(\tau) = \begin{pmatrix} x\,(\tau) \\ y\,(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \end{pmatrix}$ gegeben ist und τ von 0 bis π läuft.

(6 Punkte)

Viel Erfolg!