Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2018, 31.07.2018

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum, der von den Vektoren v_1, v_2 und v_3 aufgespannt wird. Die Vektoren sind bezüglich einer Orthonormalbasis gegeben durch

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in [0, \pi].$$

   a) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v_1} | \mathbf{v_2} \rangle$.

   b) Für welche α bilden $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   c) Normieren Sie $\mathbf{v_1}$.

(8 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum der Funktionen

$$f(\vartheta) = \sum_{i=0}^{2} c_i g_i(\vartheta), \quad g_i(\vartheta) = \sin^i(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], c_i \in \mathbb{C}.$$

   Ein Skalarprodukt $\langle h | f \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle h | f \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \; h^*(\vartheta) f(\vartheta) \cos(\vartheta).$$

   a) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.

   b) Berechnen Sie die Norm der Vektoren g_0 und g_1.

   c) Berechnen Sie $\langle g_0 | g_1 \rangle$.

   d) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums.

(13 Punkte)

3. Gegeben seien die 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$: $\mathbf{A}$ ist hermitesch und regulär und besitzt die Eigenwerte a_1, a_2, a_3, $\mathbf{B}$ ist unitär.
   Bestimmen Sie:

   a) $\det(\mathbf{A})$

   b) $\frac{\det(\mathbf{B}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{B})}{\det(\mathbf{A})}$

   c) $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$

d) $\mathrm{Sp}(\mathbf{B}(\mathbf{AB})^\dagger \mathbf{A^{-1}})$

(8 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Bestimmen Sie einen beliebigen Eigenvektor der Matrix A.

(9 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion:
$f(x,y) = \sin(x)\cos(y), \qquad x, y \in [-2\pi, 2\pi].$

a) Bestimmen Sie den Gradienten ∇f.

b) Bestimmen Sie die Matrix der zweiten Ableitungen (Hesse-Matrix) von $f(x,y)$.

c) Zeigen Sie, dass $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ein stationärer Punkt von $f(x,y)$ ist.

d) Bestimmen Sie die Art des stationären Punktes.

e) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um den Punkte $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bis zur 2. Ordnung.

(17 Punkte)

6. Zylinderkoordinaten $q = (r,\ \varphi,\ z)$, $r, \varphi, z \in \mathbb{R}, r > 0$, $\varphi \in [0, 2\,\pi]$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\varphi), \\ y &= r \cdot \cos(\varphi), \\ z &= z. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ für Zylinderkoordinaten.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante.

c) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\iiint\limits_{Zylinder} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, z,$$

wobei die Integration über einen Zylinder mit $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ erfolgt.

(9 Punkte)

Viel Erfolg!