# 2. Klausur zur Vorlesung
# Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2017, 04.09.2017

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname, Klausurnummer und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

---

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

**Klausurnummer: 1**

1. Betrachten Sie den Vektorraum der reelen Polynome vom Maximalgrad 2. Gegeben seien die Vektoren
$$p_1(x) = a(x-1) \qquad p_2(x) = x + b \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$
Das Skalarprodukt sei definiert durch
$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ p(x) \cdot q(x)$$
   a) Für welche $a$ ist $p_1(x)$ normiert?
   b) Für welche $a, b$ sind $p_1(x)$ und $p_2(x)$ orthogonal?
   c) Für welche $a, b$ sind $p_1(x)$ und $p_2(x)$ linear abhängig?
   d) Geben sie eine Basis des Vektorraums an.

(6 Punkte)

2. Es gelte die Matrixgleichung $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$, wobei $\mathbf{U}$ eine unitäre Matrix ist. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe von $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^\dagger$ und $\mathbf{D}^{-1}$ an. (4 Punkte)

3. Berechnen Sie die Determinante
$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 \\ c & c & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$
   a) Zeigen Sie, dass $\lambda = a$ ein Eigenwert ist.
   b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte.
   c) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte die von den jeweils dazugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Räume.

(11 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+yz}$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y, z)$.
   b) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion.
   c) Bestimmen Sie $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}$.
   d) Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y, z)$ in einer Taylorreihe bis zur 2. Ordnung um den Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

(15 Punkte)

6. Berechnen Sie, sofern existent, folgendes Integral oder stellen Sie dessen Nichtexistenz fest.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{y^2}{x}$$

(3 Punkte)

7. Betrachten Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \mathbf{dx} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

   entlang des Weges $\gamma = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}$, wobei $\tau$ von 0 bis $\pi$ läuft.

(5 Punkte)

Viel Erfolg!