Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2017, 08.08.2017

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

Klausurnummer: 1

1. Betrachten Sie den Vektorraum der Funktionen

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

mit dem Standardskalarprodukt.

   a) Für welche a,b sind die Vektoren linear abhängig?
   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v_1} | \mathbf{v_2} \rangle$.
   c) Für welche a,b sind $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ orthogonal?

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Raum der reellen, symmetrischen 2×2 Matrizen. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{F} | \mathbf{G} \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{F} | \mathbf{G} \rangle = \mathrm{Spur}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{G}).$$

   a) Welche Dimensionalität hat der Vektorraum? Geben Sie eine mögliche Basis des Vektorraums an.
   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2 \rangle$.
   c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis, welche die Matrizen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E_2}$ als Basisvektoren enthält.

(15 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ und $\mathbf{C}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ selbstadjungiert, $\mathbf{B}$ unitär, $\mathbf{C}$ symmetrisch und $\mathbf{E}$ hat die Matrixelemente $E_{ij} = \delta_{ij}$. Berechnen Sie

   a) $(\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{C})(\mathbf{B} - \mathbf{C}^{-1}) + \mathbf{B}^\dagger \mathbf{C}^{-1}$
   b) $\det(\mathbf{E} + \mathbf{E})$
   c) $\det(\mathbf{CAB}(\mathbf{A^{-1}B})^\dagger (\mathbf{C}^T)^{-1})$

(6 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ und seine Nullstellen.

(5 Punkte)

5. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$.
   b) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{B}$.

(8 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion:
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (xy^2 - x)\,\mathrm{e}^y$
   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Der Punkt (0,1) ist ein stationärer Punkt von $f(x,y)$. Bestimmen Sie alle weiteren stationären Punkte von $f(x,y)$.
   c) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um (0,1) bis zur 2. Ordnung.
   d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt (0,1) um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(25 Punkte)

7. Berechnen Sie, sofern existent, folgendes Integral oder stellen Sie dessen Nichtexistenz fest.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial}{\partial k} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{khx} - 1}{h} \mathrm{d}x$$

(5 Punkte)

Viel Erfolg!