Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2016, 13.09.2016

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum der reelen Polynome vom Maximalgrad 3. Gegeben seien die Vektoren

$$p_1(x) = a \cdot (x^3 + x^2 - 1), \qquad p_2(x) = x^2 + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Das Skalarprodukt sei definiert durch

$$\langle p|q \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{dx}\, p(x) \cdot q(x)$$

a) Für welche a, b sind p_1, p_2 orthogonal?

b) Für welche a, b sind p_1, p_2 linear abhängig?

c) Für welche a ist p_1 normiert?

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Auf diesem Vektorraum sei das Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v} \rangle = \underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}\, \underline{\mathbf{v}},$$

wobei $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums.

(5 Punkte)

3. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & c & b & c \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & c \\ 0 & b & -c & c & 0 \\ 0 & b & c & 0 & b \end{vmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$. (5 Punkte)

4. Betrachten Sie das folgende inhomogene linerare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche a ist das Gleichungssystem lösbar?

b) Bestimmen sie alle Lösungen des lineraren Gleichungssystems mit dem zuvor bestimmten a.

(6 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = (x + 1)yz\mathrm{e}^{xy+yz}$$

a) Zeigen Sie, dass es sich bei dem Punkt $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ um einen stationären Punkt handelt.

b) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt um ein Minimum, ein Maximum oder einen Stattelpunkt handelt.

c) Entwickeln Sie $f(x, y, z)$ in einer Taylorreihe 2. Ordnung um den Punkt $(x, y, z) = (0, -1, 1)$.

(15 Punkte)

6. Berechnen Sie, sofern existent, folgendes Integral oder stellen Sie dessen Nichtexistenz fest.

$$\lim_{x \to d} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \, \frac{1}{y^4} \mathrm{e}^{-y^2\left(x^2 - d^2\right)}$$

(5 Punkte)

7. Betrachten Sie das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \mathbf{d}\underline{\mathbf{x}} \, \underline{\mathbf{x}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{x}}}$$

entlang des Weges $\gamma_r(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau \cdot \cos(\tau \cdot \pi) \\ \tau \cdot \sin(\tau \cdot \pi) \end{pmatrix}$, wobei τ von 0 bis 1 läuft.

(6 Punkte)

Viel Erfolg!