Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2016, 25.07.2016

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum der Funktionen

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   mit dem Standardskalarprodukt.

   a) Für welche a,b sind die Vektoren linear abhängig?

   b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v_2} | \mathbf{v_3} \rangle$.

   c) Für welche a,b sind $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ orthogonal?

(6 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum F der Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}^{-inx}$$

   mit $c_n \in \mathbb{C}$. Das Skalarprodukt $\langle f | f' \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle f | f' \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; f^*(x) f'(x).$$

   a) Gegeben seien $g(x) = \mathrm{e}^{-ikx}$ und $h(x) = \mathrm{e}^{-ik'x}$ mit $k, k' \in [0, N]$. Bestimmen Sie $\langle g | h \rangle$.

   b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.

   c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums.

(8 Punkte)

3. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times4}$. Dabei sei $\mathbf{A}$ selbstadjungiert, $\mathbf{B}$ unitär und $\mathbf{C}$ symmetrisch. Berechnen Sie

   a) $\mathbf{B}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{C}$

   b) $\mathbf{B}^\dagger(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\dagger)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$

   c) $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^\dagger)$

(6 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie einen vollständigen Satz von Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.
   c) Bestimmen Sie alle Skalarprodukte zwischen den Eigenvektoren.
   d) Berechnen Sie $\det(AA^\dagger)$.
   e) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie!

(10 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = yx\,\mathrm{e}^{x-y}$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f(x,y)$.
   c) Bestimmen Sie, ob es sich bei den stationären Punkten um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(12 Punkte)

6. Berechnen Sie, sofern existent, folgendes Integral oder stellen Sie dessen Nichtexistenz fest.

$$\lim_{x\to d} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y\, \frac{1}{y^3} \mathrm{e}^{-y^2\left(x^2-d^2\right)}$$

(5 Punkte)

7. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathbf{dx}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad , \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

   entlang des Weges $\gamma = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^2 \end{pmatrix}$, wobei τ von 0 bis 1 läuft.

Viel Erfolg!