Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2015, 09.09.2015

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.
Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und die Untervektorräume $f(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + c_3v_3(x) + c_4v_4(x)$ mit
   a) $v_1 = \mathrm{e}^{2x}, \quad v_2 = \mathrm{e}^{-2x}, \quad v_3 = \sinh(x), \quad v_4 = \cosh(x).$
   b) $v_1 = \mathrm{e}^{x}, \quad v_2 = \sinh(x) + \mathrm{e}^{-x}, \quad v_3 = \sinh(x), \quad v_4 = \cosh(x) - \mathrm{e}^{-x}.$

   Bestimmen Sie die Dimensionalität der beiden Untervektorräume.

   Hinweis: $\sinh(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$ und $\cosh(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   (3 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{C}^{2x2}$ mit dem Skalarprodukt:
$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{*}b_{ij}.$$
   Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{2x2}$ mit
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   Betrachten Sie den Vektorraum $U = \operatorname{span}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$.
   a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle A|C\rangle$.
   b) Normieren Sie den Vektor $\mathbf{A}$.
   c) Bestimmen Sie die Dimensionalität von U und geben Sie eine beliebige orthonormale Basis an.

   (6 Punkte)

3. Geben sie alle nicht-trivialen Lösungen des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems an:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
   (4 Punkte)

4. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{3x3}$ mit
$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie $\mathbf{AB}$ und $\det(\mathbf{ABBAAB})$.

   (4 Punkte)

5. Gegeben sei die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert (-2).
   c) Ist der Eigenwert (-2) entartet? Begründen Sie.

(7 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = a \cdot \exp\left(2(x^2 + y^2)\right) - (x - y)^2, \text{ mit } a \in \,]0, 1[\,.$

   An der Stelle (0,0) liegt ein stationärer Punkt vor. Bestimmen Sie, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(8 Punkte)

7. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{xyz} - \mathrm{e}^{-xyz}\right)$$

   in eine Taylorreihe um (0,0,0) bis zur 9. Ordnung.

(3 Punkte)

8. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} dz z \cdot \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

(8 Punkte)

Viel Erfolg!