Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2015, 20.07.2015

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Geben Sie die Dimension des Untervektorraumes $U_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

   b) Für welche α sind $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ orthogonal?

   c) Konstruieren Sie eine orthonormale Basis für den Vektorraum $U_2 = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ für $\alpha = 1$.

(10 Punkte)

2. Die Funktionen $g_i = x^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, bilden die Basis eines vierdimensionalen Vektorraums V. Gegeben sei die Abbildung A einer Funktion $f(x) \in V$ auf eine Funktion $\tilde{f}(x) : \tilde{f}(x) = \frac{df}{dx}$.

   a) Bestimmen Sie die Dimensionalität des Raums, der von den Bildern aufgespannt wird und geben Sie eine Basis an.

   b) Ist die Abbildung B einer Funktion $f(x) \in V$ auf die Funktion $\overline{f}(x) : \overline{f}(x) = \frac{df}{dx} + g_3(x)$ eine lineare Abbildung? Begründen Sie.

   c) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$, die Matrixdarstellung der Abbildung A bezüglich der Basis $(g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x))$.

(8 Punkte)

3. Gegeben seien zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & -i \\ i & 2 & i & 0 \\ 0 & -i & 2 & i \\ i & 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \det(\mathbf{B}) = 1.$$

   Berechnen Sie

   a) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^\dagger - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

   b) $\det\left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}\right)$

(5 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert (-4).
   c) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie!

(12 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion:
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (2xy + x^2)\, \mathrm{e}^{x+y}$
   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.
   b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f(x, y)$.
   c) Entwickeln Sie $f(x, y)$ in eine Taylorreihe um $(-2, 0)$ bis zur 2. Ordnung.
   d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(-2, 0)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(16 Punkte)

6. Berechnen Sie, sofern sie existieren, folgende Integrale oder stellen Sie deren Nichtexistenz fest.
   a)
$$I = \lim_{y\to 1} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \frac{\cos(xy^2)}{x}$$
   b)
$$I = \int_1^3 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} dz \frac{1}{x}$$
   c)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \quad \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

   Hinweis:
$$\int_0^{\infty} dx \quad x \quad \mathrm{e}^{-x^2} = 0.5$$

(11 Punkte)

Viel Erfolg!