2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2014, 10.09.2014

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum der reellen Polynome vom Maximalgrad 4. Gegeben seien die Vektoren

$$p_1(x) = x^4, \quad p_2(x) = x^3 - \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad p_3(x) = x^2 + 2x, \quad p_4(x) = x.$$

   a) Prüfen Sie, für welche α der gegebene Satz von Vektoren linear unabhängig ist.

   b) Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des Vektorraums? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Auf diesem Raum sei das Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

definiert, wobei die Vektoren als Spaltenvektoren, d.h. 2×1 Matrizen geschrieben sind.

   a) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Normieren Sie $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

   c) Geben Sie eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormale Basis an.

   d) Zeigen Sie, dass die obige Definition die Anforderungen an ein Skalarprodukt erfüllt.

(12 Punkte)

3. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$ für die die Matrix invertierbar ist.

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die von den jeweils dazugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Räume.

(12 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y \sin x^3$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.
   b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion.
   c) Bestimmen Sie die Art der stationären Punkte.

(11 Punkte)

6. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \cos(xyz)$$

   in eine Taylorreihe um $(0, 0, 0)$ bis zur 6. Ordnung.

(3 Punkte)

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C d\underline{x}\,\underline{f}(\underline{x}),$$

   wobei $\underline{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Kurve C durch $\underline{x}(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \end{pmatrix}$ gegeben ist und τ von 0 bis π läuft.

(7 Punkte)

Viel Erfolg!