# Klausur zur Vorlesung
# Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2014, 21.07.2014

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

---

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum der komplexen $2\times 2$-Matrizen. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{M}_1$, und $\mathbf{M}_2$ mit

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie den Untervektorraum, der von den beiden Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ aufgespannt wird. Geben Sie die Dimensionalität des Untervektorraums in Abhängigkeit von $\alpha$ an.

(3 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum der Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=-2}^{2} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

wobei die $c_n$ beliebige, komplexe Zahlen sind.

Ein Skalarprodukt $\langle f|g\rangle$ ist gegeben durch

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ g^*(x) f(x).$$

   a) Geben Sie die Dimension des Vektorraums an.
   b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums an.
   c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Vektorraums.

(6 Punkte)

3. Gegeben seien die $\mathbb{C}^{n\times n}$-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. $\mathbf{A}$ sei orthogonal und $\mathbf{B}$ unitär. Außerdem gelte: $\det(C) = 1$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.
   a) $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{AC})$
   b) $\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{-1}\mathbf{A}$
   c) $\det(\mathbf{AC}) \cdot \det(\mathbf{A})$

(6 Punkte)

4. Geben Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

an.

(5 Punkte)

5. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.
   c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt zwischen dem Eigenvektor zum größten Eigenwert und dem Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert (Tipp: Vermeiden Sie lange Rechnungen).

(8 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)\, \mathrm{e}^{-x^2}$
   a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von $f(x, y)$.
   b) Bestimmen Sie, ob es sich bei den stationären Punkten um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
   c) Entwickeln Sie $f(x, y)$ in eine Taylorreihe um $(-1, 0)$ bis zur 2. Ordnung.

(16 Punkte)

7. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^x \mathrm{d}z \;\cos(yz)$$

(4 Punkte)

Viel Erfolg!