2. Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2013, 18.09.2013

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $R[X]_{\leq 4}$ der reellen Polynome vom Maximalgrad 4. Gegeben seien die Elemente dieses Vektorraumes

$$p_1(x) = x^4 + 2x, \quad p_2(x) = x^3, \quad p_3(x) = x^2 + 2x, \quad p_4(x) = x^2 + \alpha x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   a) Prüfen Sie für $\alpha = 1$, ob der gegebene Satz von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig ist.
   b) Geben Sie die Dimension des von den Vektoren $p_3(x)$ und $p_4(x)$ aufgespannten Untervektorraumes in Abhängigkeit von α an.
   c) Ergänzen Sie $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ für $\alpha = 1$ durch weitere Polynome, sodaß sich eine Basis von $R[X]_{\leq 4}$ ergibt.

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Auf diesem Raum sei das Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

definiert, wobei die Vektoren als Spaltenvektoren, d.h. 3×1 Matrizen geschrieben sind.

   a) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   b) Normieren Sie $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

(5 Punkte)

3. Gegeben sei das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & \alpha \\ 3-\alpha & 4 & -\alpha \\ \alpha & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   a) Lösen Sie das gegebene Gleichungssystem für $\alpha = 1$.
   b) Bestimmen Sie jeweils die Werte für α, für die das gegebene Gleichungssystem keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

(9 Punkte)

4. Es gelte die Matrixgleichung $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D}$, wobei $\mathbf{U}$ eine unitäre Matrix ist. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe von $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^\dagger$ und $\mathbf{D}^{-1}$ an.

(4 Punkte)

5. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(3 Punkte)

6. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die von den jeweils dazugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Räume.

(8 Punkte)

7. Gegeben sei die Funktion

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \mathrm{e}^{xy+z}$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y, z)$.
b) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion.
c) Bestimmen Sie $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$.

(9 Punkte)

8. Berechnen Sie

$$I = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_0^\pi \mathrm{d}y \int_0^{\sin y} \mathrm{d}z \, \sqrt{x}.$$

(3 Punkte)

9. Nach dem Satz von Stokes kann der Inhalt eines einfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes über ein Integral entlang der das Gebiet umschließenden Kurve berechnet werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt A einer Ellipse (Achsenlängen a und b) durch das Kurvenintegral

$$A = \frac{1}{2} \int_C d\underline{x} \, \underline{f}(\underline{x}),$$

wobei $\underline{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Ellipsenkurve C durch $\underline{x}(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\tau \\ b\sin\tau \end{pmatrix}$ gegeben ist und τ von 0 bis 2π läuft.

(7 Punkte)

Viel Erfolg!