Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2013, 22.07.2013

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handys oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Geben die Dimension des Untervektorraumes $U_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.
   b) Bestimmen Sie alle möglichen α, sodaß die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.
   c) Konstruieren Sie eine orthonormale Basis von U_1.

(9 Punkte)

2. Betrachten Sie die Abbildung

$$\mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \mapsto \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & c_2 - c_3 \\ 0 & c_0 + c_1 \end{pmatrix},$$

   wobei $R[X]_{\leq 3}$ der Raum der reellen Polynome vom Maximalgrad 3 ist.

   a) Geben Sie die Bilder von $x^2 + x^3$ und $x - 2x^2$ an.
   b) Bestimmen Sie die Dimension des Bildraumes der Abbildung.

(4 Punkte)

3. Betrachten Sie den Vektorraum der komplexen 2×2-Matrizen. Normieren Sie die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

   bezüglich des Skalarproduktes $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}\right)$.

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie eine reelle, orthogonale Matrix $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie, welche Werte deren Determinante annehmen kann.

(4 Punkte)

5. Gegeben seien die $\mathbb{C}^{n\times n}$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. $\mathbf{A}$ sei unitär und $\mathbf{B}$ invertierbar. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.
   a) $\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\right)$
   b) $\left[3\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\right]^{-1}$
   c) $\det\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{\dagger}\right)$

(7 Punkte)

6. Gegeben sei die symmetrische Matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
   b) Bestimmen Sie den Raum der Eigenvektoren zum kleinsten Eigenwert.

(9 Punkte)

7. Gegeben sei die Funktion

   $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=(2x+y^2)\,\mathrm{e}^{x}$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Zeigen Sie, daß an der Stelle $(-1,0)$ ein stationärer Punkte vorliegt.
   c) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in eine Taylorreihe um $(-1,0)$ bis zur 2. Ordnung.
   d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(-1,0)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(14 Punkte)

8. Berechnen Sie
   a)

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}x\,\left(\frac{\sin^3 x}{\ln y}\mathrm{e}^{-y^2}+y\right)$$

   b)

$$\lim_{x\to c}\frac{\partial}{\partial x}\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\,\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-y^2\left(x^2-c^2\right)}$$

(7 Punkte)

Viel Erfolg!