# 2. Klausur zur Vorlesung
# Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2012, 24.08.2012

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

---

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum aller stetigen, komplexwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Sind folgende Sätze von Vektoren linear abhängig oder unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a)
   $$\mathbf{v_1} = \sin(x) \qquad \mathbf{v_2} = \cos(x) \qquad \mathbf{v_3} = \sin(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

   b)
   $$\mathbf{v_1} = \mathrm{e}^{x} \qquad \mathbf{v_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \mathbf{v_3} = \sin(x) + \mathrm{e}^{x}$$

   (3 Punkte)

2. Betrachten Sie lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ auf den Raum der auf $[0,1]$ stetigen reellen Funktionen.
   Zwischen diesen Räumen sei die spezielle Abbildung
   $(c_1, c_2, c_3) \mapsto c_2 + (c_3 - c_1)\, x^2$
   definiert.

   a) Welche Dimensionalität hat der Bildraum dieser linearen Abbildung?
   b) Geben Sie das Bild von $(0,1,0)$ an.
   c) Geben Sie eine mögliche Basis des Bildraums an.

   Es sei ein Skalarprodukt $\langle v|w\rangle$ durch
   $$\langle v|w\rangle = \int_0^1 dx\ v(x)w(x)$$
   definiert.

   d) Zeigen Sie, dass das Bild von $(0,1,0)$ normiert ist.
   e) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des Bildraumes, die das Bild von $(0,1,0)$ als Basisvektor enthält.

   (9 Punkte)

3. Gegeben sei das Gleichungssystem
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3t & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie die Werte von $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem nichttriviale Lösungen besitzt.

   (5 Punkte)

4. Betrachten Sie die drei $3 \times 3$ Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2 \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie: $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{C}\right)\right)$

(4 Punkte)

5. Betrachten Sie die drei Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. Die Matrix $\mathbf{A}$ sei unitär, die Matrix $\mathbf{B}$ sei hermitesch. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:
   a) $\mathbf{A}^\dagger \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^\dagger\right)^{-1} \mathbf{B}^\dagger$
   b) $\mathbf{A}\left(\mathbf{CBA}\right)^\dagger$

(3 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion
   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = -2zx + y^2 - \frac{1}{2}z^2$
   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y, z)$.
   b) Bestimmen Sie Lage und Art der stationären Punkte von $f(x, y, z)$.

(12 Punkte)

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_C d\underline{x}\,\underline{f}(\underline{x}),$$

wobei $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Die geschlossene Kurve $C$ ist durch $\underline{x}(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \end{pmatrix}$ gegeben, wobei $\tau$ von 0 bis $2\pi$ läuft.

(3 Punkte)

8. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{e}^{-(x+y)^2}.$$

Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ und führen Sie eine geeignete Variablentransformation durch.

(7 Punkte)

Viel Erfolg!