Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2012, 18.07.2012

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Für welches α sind $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ orthogonal?
   b) Für welches α sind $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ linear abhängig?

(5 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum aller Polynome mit maximalem Grad 1.

   Ein Skalarprodukt $\langle v|w \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle v|w \rangle = \int_0^1 dx \; v(x)w(x).$$

   a) Geben Sie die Dimension und eine Basis des Vektorraums an.
   b) Konstruieren eine orthonormale Basis des Vektorraumes.

(7 Punkte)

3. Betrachten Sie die zwei unbekannten 4×4 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 1 \\ \det(\mathbf{B}) &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie: $\quad \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\dagger}\right)$

(3 Punkte)

4. Betrachten Sie die drei Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. Die Matrix $\mathbf{B}$ sei hermitesch, die Matrix $\mathbf{C}$ sei unitär. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

   a) $\mathbf{A}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^{\dagger}\right)$
   b) $\mathbf{C}\left(\mathbf{AC}\right)^{\dagger} - \mathbf{A}$
   c) $\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{BAC}\right)^{-1}\right)^{-1}$

(5 Punkte)

5. Gegeben sei die symmetrische Matrix $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix.
   b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren bzw. Eigenvektorräume zum größten Eigenwert.

(8 Punkte)

6. Gegeben sei die reelle Funktion $f(x, y) = \sin(x + y)$ mit x, y reell.

   Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung um den Punkt $x = 0$, $y = \pi$.

(6 Punkte)

7. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.
   b) Berechnen Sie die stationären Punkte von $f(x, y)$.

(9 Punkte)

8. Berechnen Sie

   a)

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{\pi/2}^{\pi} dy\, \frac{x \sin(y)}{y^2}$$

   b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\infty} dy \int_{0}^{x} dz\, \mathrm{e}^{-z^2 y}$$

(5 Punkte)

Viel Erfolg!