Mathematik für Studierende der Chemie II – SoSe 2011, 23.09.2011

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum aller reellen 2×2 Matrizen. Gegeben seien

   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie ob **A**, **B** und **C** linear abhängig oder unabhängig sind.

   (2 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum V aller reellwertigen Polynome mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Auf diesem sei das folgende Skalarprodukt definiert:

   $$\langle f|g\rangle \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} f(x)\, g(x)\,, \quad f, g \in V$$

   Gegeben sei der Untervektorraum $U = \operatorname{span}\{h_0, h_1, h_2\}$ mit

   $$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \quad h_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4\pi}} 2x, \quad h_2(x) = x^2.$$

   a) Zeigen Sie, daß h_0 und h_1 orthogonal und jeweils normiert sind.
   b) Geben Sie die Dimension des Untervektorraumes U an.
   c) Bestimmen Sie eine Funktion $\tilde{h}_2 \in U$, die orthogonal zu h_0 und h_1 ist. (Eine Normierung von $\tilde{h}_2$ ist nicht erforderlich.)

   Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Beziehungen
   $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x e^{-x^2} = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^3 e^{-x^2} = 0$.

   (7 Punkte)

3. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times 1}$ aller reellen $n \times 1$ Matrizen (Spaltenvektoren) und die $n \times n$ Matrizen, die lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ auf $\mathbb{R}^{n\times 1}$ darstellen. Gegeben sei ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = 1$ und die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T$, wobei $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{E}$ die Einsmatrix ist.

   a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$.
   b) Zeigen Sie, daß **A** symmetrisch ist.
   c) Zeigen Sie, daß **v** ein Eigenvektor von **A** ist, und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert.
   d) Betrachten Sie einen zu **v** orthogonalen Vektor **u**, d.h. einen Vektor **u** mit $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u} = 0$. Zeigen Sie, daß **u** ebenfalls ein Eigenvektor von **A** ist, und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert.

   (9 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\mathbf{A}$ invertierbar ist.
   b) Lösen Sie für $\alpha = 1/\sqrt{\pi}$ das homogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = 0$.

(7 Punkte)

5. Gegeben seien die invertierbaren Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. $\mathbf{A}$ sei unitär und $\mathbf{B}$ hermitesch. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{\dagger}\left(\mathbf{BA}\right)^{-1}$$

(3 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-xy} + (1 + xy)\, y$$

   a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
   b) Zeigen Sie, daß an den Stellen $(1,0)$ und $(-e^{-1}, e)$ stationäre Punkte vorliegen.
   c) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um $(1,0)$ bis zur 2. Ordnung.
   d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(1,0)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(16 Punkte)

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C d\underline{x}\, \underline{f}\left(\underline{x}\right),$$

wobei $\underline{f}\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Kurve C durch $\underline{x}\left(\tau\right) = \begin{pmatrix} x\left(\tau\right) \\ y\left(\tau\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \end{pmatrix}$ gegeben ist und τ von 0 bis π läuft.

(5 Punkte)

Viel Erfolg!