Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2011, 22.07.2011

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

   a) Für welche α sind $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ orthogonal?
   b) Bestimmen Sie alle α, für die $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linear unabhängig sind.
   c) Betrachten Sie die beiden Untervektorräume $U_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ und $U_2 = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_3}\}$. Bestimmen Sie jeweils die Dimension von U_1 und U_2 für $\alpha = 6$.

(6 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum U aller stetigen, reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Die Funktionen $(g_i)_{i=1..4}$ bilden eine Basis für den Untervektorraum V.

$$g_1(x) = e^x, g_2(x) = e^{-x}, g_3(x) = xe^x, g_4(x) = xe^{-x}$$

   Gegeben sei die Abbildung A einer Funktion $f(x) \in V$ auf die Funktion $\tilde{f}(x) : \tilde{f}(x) = \frac{df}{dx} - f(x)$.

   a) Zeigen Sie, daß die Abbildung A linear ist.
   b) Welche Dimension hat der Bildraum der Abbildung? Geben Sie eine Basis des Bildraumes an.
   c) Zeigen Sie, daß der Bildraum ein Untervektorraum von V ist.
   d) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$, die Matrixdarstellung der Abbildung A bezüglich der Basis $(g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))$.

(10 Punkte)

3. Gegeben seien die beiden Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie

   a) $\mathbf{BB}^\dagger$, $\mathbf{B}(\mathbf{AB})^\dagger$, $\mathbf{AB} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$
   b) $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{B}^\dagger)$, $\det\left((\mathbf{A^{-1}})^\dagger \mathbf{B}(\mathbf{AB})^\dagger\right)$

   Hinweis: Vermeiden Sie, soweit möglich, unnötige Rechenschritte. (13 Punkte)

4. Gegeben sei die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.
b) Geben Sie die Dimension der jeweiligen Eigenräume an.

(9 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.
b) Zeigen Sie, daß an der Stelle $(-1,0)$ ein stationärer Punkt vorliegt.
c) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um $(-1,0)$ bis zur 2. Ordnung.
d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(-1,0)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(14 Punkte)

6. Bestimmen Sie das folgende Integral, sofern dieses existiert. Begründen Sie andernfalls dessen Nichtexistenz.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_1^2 dy \, \frac{1}{y} e^{-yx^2}$$

(3 Punkte)

7. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, dy \, e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2}$$

wobei $\int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $u = x + y, v = x - y$.

(5 Punkte)

Viel Erfolg!