Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2010, 08.10.2010

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie den von den gegebenen Vektoren aufgespannten Untervektorraum $\{\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \lambda_3 \mathbf{v_3} | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$.

a) Welche Dimensionalität hat der Untervektorraum für $\alpha = 0$? Begründen Sie!

b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß der Untervektorraum zweidimensional ist.

c) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß die gegebenen Vektoren bzgl. Standardskalarprodukt jeweils orthogonal zueinander sind.

(7 Punkte)

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der reellen Polynome vom Maximalgrad 3. Der Raum der Vektoren

$$\{c_1 \mathbf{p_1} + c_2 \mathbf{p_2} + c_3 \mathbf{p_3} + c_4 \mathbf{p_4} | c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p_1} &= p_1(x) = 2 - 2x - 2x^2 \\ \mathbf{p_2} &= p_2(x) = 2 + x + x^2 + 9x^3 \\ \mathbf{p_3} &= p_3(x) = 2 + 5x^2 + x^3 \\ \mathbf{p_4} &= p_4(x) = 2 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.

a) Zeigen Sie, daß der Untervektorraum mit dem Vektorraum identisch ist.

b) Bestimmen Sie die Komponenten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ des Polynoms $f(x) = 14 + 6x + 12x^2 + 47x^3$ bzgl. der Basis $(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})$.

(7 Punkte)

3. Gegeben seien die beiden Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6i & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{AB}$, $\det\left(\mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger\right)$, $\det\left(\mathbf{ABA^{-1}B^{-1}}\right)$.

Hinweis: Vermeiden Sie, soweit möglich, unnötige Berechnungen.

(7 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.
b) Wie lauten die Eigenwerte von $\mathbf{A}^T$?

(8 Punkte)

5. Berechnen Sie den Gradienten der folgenden reellen Funktion
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^4 - 2x^2 y\sqrt{z} + 3yz^4 + 2$

(4 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 4x^2 + y^2\left(1 - 2e^{-x}\right)$

a) Überprüfen Sie, ob an der Stelle $(0, 0)$ ein stationärer Punkt vorliegt.
b) Bestimmen Sie ggf., ob es sich um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(9 Punkte)

7. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_A \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad A : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq e^2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f(q,Q) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial Q} & \frac{\partial y}{\partial Q} \end{vmatrix} \mathrm{d}q\mathrm{d}Q$.

(6 Punkte)

8. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\lambda\, e^{-x^2 y^2} \sin(\lambda x)$$

(2 Punkte)

Viel Erfolg!