Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2010, 26.07.2010

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ mit
$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   a) Prüfen Sie, ob $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonal sind.
   b) Bestimmen Sie die Dimension des Aufspanns $L(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$.
   c) Geben Sie eine Bedingungsgleichung für a, b, c an, so daß $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zum Raum $L(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ gehört.

(7 Punkte)

2. Betrachten Sie die lineare Abbildung
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[X], \quad (c_1, c_2, c_3) \mapsto c_1 + (c_2 + c_3)\, x,$
wobei $\mathbb{R}[X]$ der Raum der auf $[0,1]$ stetigen reellen Funktionen sei.

   a) Welche Dimensionalität hat der Bildraum der linearen Abbildung?
   b) Geben Sie die Bilder von $(1,0,0), (0,1,2)$ an.

   Auf $\mathbb{R}[X]$ sei ein Skalarprodukt $\langle v|w\rangle$ durch
$$\langle v|w\rangle = \int_0^1 dx\ v(x)w(x)$$
   definiert.

   c) Zeigen Sie, daß das Bild von $(1,0,0)$ ein normierter Vektor ist.
   d) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des Bildraumes, die das Bild von $(1,0,0)$ als Basisvektor enthält.

(9 Punkte)

3. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche α sind die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{AB} + \mathbf{AB}^\dagger$ invertierbar?

(8 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

b) Geben Sie die Dimension der jeweiligen Eigenräume an. Ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Begründen Sie!

(11 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy\, e^{-(x+y)}$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y)$.

b) Zeigen Sie, daß an den Stellen $(0,0)$ und $(1,1)$ stationäre Punkte vorliegen.

c) Entwickeln Sie $f(x,y)$ in einer Taylorreihe um $(1,1)$ bis zur 2. Ordnung.

d) Bestimmen Sie, ob es sich bei dem stationären Punkt $(1,1)$ um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(13 Punkte)

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\pi dx\, \frac{\cos(xy)}{x^2}$$

b)

$$\int_1^\infty dx \int_{e^{-x}}^1 dy\, \frac{1}{x^3 y}$$

(8 Punkte)

Viel Erfolg!