Nachklausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2009, 9.10.2009

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Markieren Sie **deutlich** Beginn und Ende einer jeden Aufgabenbearbeitung.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Sind folgende Sätze von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a)

   $$v_1 = \sin(x) \qquad v_2 = \cos(x)$$
   $$v_3 = \sin(x) + \mathrm{e}^x \qquad v_4 = \cos(x) - \mathrm{e}^x$$

   b)

   $$v_1 = \mathrm{e}^x \qquad v_2 = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$$
   $$v_3 = \sin(x) + \mathrm{e}^x \qquad v_4 = \cos(x) + \mathrm{e}^{-x}$$

   (3 Punkte)

2. Die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ bilden einen Vektorraum. Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen weiteren Vektor $\boldsymbol{v}$ so, dass $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.

   (3 Punkte)

3. Gegeben sei das Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3t & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Werte von $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem Lösungen mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$ besitzt.

   b) Geben Sie für diese t alle Lösungen an.

(6 Punkte)

4. Gegeben seien $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie

   a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^\dagger$

   b) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^\dagger \boldsymbol{A}^\dagger$ (4 Punkte)

5. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = a\mathrm{e}^{(x^2+y^2)} - (x+y)^2, \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \neq \{0,2\}.$

   An der Stelle $(0,0)$ liegt ein stationärer Punkt vor. Bestimmen Sie, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. (7 Punkte)

6. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2+z^2)}$ um den Punkt $x = y = z = 0$ bis zur dritten Ordnung. (3 Punkte)

7. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}y \, \frac{x\cos(y)}{y^2}$. (2 Punkte)

8. Bestimmen Sie $f(1)$, wobei

   $$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{1}^{\infty} \mathrm{d}y \left(\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy^2} - xy\mathrm{e}^{-y^2} \right)$$ (2 Punkte)

9. Bestimmen Sie das Integral

   $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, f(x-y)f(x+y)$$

   unter der Voraussetzung, dass für die Funktion $f(x)$ der Integralwert $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)$ bekannt ist. (4 Punkte)

Viel Erfolg!