Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Chemie II – SS 2009, 14.08.2009

Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Name, Vorname und **Matrikelnummer**. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.

Lösen Sie die Aufgaben nachvollziehbar auf Grundlage der in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Sätze und Definitionen.
Jede Benutzung von Hilfsmitteln, Handies oder anderen Kommunikationsgeräten im Klausurraum wird als Täuschungsversuch geahndet.

---

1. Betrachen Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt. Gegeben seien
$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass ...
   a) $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ orthogonal sind.
   b) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_4$ linear abhängig sind.

(5 Punkte)

2. Gegeben sei die Menge der komplexen, spurlosen 2×2 - Matrizen. Sie bildet mit der in der Vorlesung eingeführten elementweisen Addition und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. $\boldsymbol{B}_1$ und $\boldsymbol{B}_2$ seien Elemente dieser Menge mit
$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$
   a) Berechnen Sie mit dem Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{M} | \boldsymbol{N} \rangle := \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^\dagger \boldsymbol{N})$ folgende Skalarprodukte: $\langle \boldsymbol{B}_1 | \boldsymbol{B}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{B}_2 | \boldsymbol{B}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{B}_1 | \boldsymbol{B}_2 \rangle$.
   b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\}$ für den von $\{\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2\}$ aufgespannten Unterraum.

(6 Punkte)

3. Gegeben sei die Matrix
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
Für welche α ist $\boldsymbol{M}$ invertierbar?

(3 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

(5 Punkte)

5. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden reellen Funktionen:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right),$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln(1 + y) \sin y.$

(4 Punkte)

6. Gegeben sei die Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + x^2 + xy.$

   An der Stelle (0,0) liegt ein stationärer Punkt vor. Bestimmen Sie, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(7 Punkte)

7. Bestimmen Sie, sofern sie exitieren, folgende Integrale oder stellen Sie Nichtexistenz fest.

   a) $I = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \int\limits_0^x \mathrm{d}y \, \frac{\sin(x)}{x^2} y,$

   b) $I(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_1^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{x} \mathrm{e}^{xy}$ an der Stelle $y = -1$.

(5 Punkte)

Viel Erfolg!