Theoretische Chemie
Prof. Dr. Wolfgang Eisfeld

Blatt 14

Übungen zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die 1. Ableitung nach x:

   (a) $f(x) = \dfrac{(x^2+5x+4)}{x^2-4x+4}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

   (b) $f(x) = \exp\left(x^2 \ln(x-1)\right)$

   (c) $f(x) = 3 \cdot \ln(x^2+2)$

   (d) $f(x) = \sqrt{(\tan(x+2))}$

   (e) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+2}\right)$

   (f) $f(x) = \exp\left(2\tan\left(x^3+1\right)\right)$

2. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung nach x:

   (a) $(x^3 + \dfrac{1}{x}) \cdot \mathrm{e}^{x+3}$

   (b) $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

   (c) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$

   (d) $5^x + 5^{-x}$

   (e) $(x^2+1)\mathrm{e}^{-2x} + (1-x^2)\mathrm{e}^{2x}$

   (f) $(\sqrt{3})^{2x}$

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin(2x)}{\tan(x)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)+x}{\sin x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{x^2-\sin x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sin(x-a)}$

4. Gegeben ist die Funktion einer reellen Variablen

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x^2+1)} .$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f(x)$ mit den Koordinatenachsen, und das asymptotische Verhalten (Polstellen, Verhalten für $|x| \to \infty$). Fertigen Sie damit eine Skizze des Kurvenverlaufs an.

(b) Zerlegen Sie $f(x)$ in Partialbrüche.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes, welches von der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ eingeschlossen wird.

5. Der symmetrische Giebel eines Renaissancehauses soll rekonstruiert werden.

   Eine gerade, ganzrationale Funktion f beschreibt im entsprechenden Intervall den oberen Giebelrand. Die x-Achse ist Tangente an den Graph der Funktion f in den Punkten P1(-4|0) und P2(4|0). Die maximale Höhe des Giebels über der Dachkante beträgt 4,0 m. Begründen Sie, dass die Funktion f eine Funktion mindestens 4. Grades sein muss. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f

6. Gegeben seien die Polynome $P(z) = z^3 + 2\,z^2 + 4\,z + 8$ und
   $Q(z) = z^4 + 4\,z^3 + 7\,z^2 + 16\,z + 12 \qquad (z \in \mathbb{C})$.

   (a) Von dem Polynom $Q(z)$ ist eine Nullstelle bekannt: $z_1 = 2i$. Schreiben Sie $P(z)$ und $Q(z)$ als Produkte von Linearfaktoren.

   (b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

   (c) Berechnen Sie das folgende Integral: $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)\,(x+3)}\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}$

7. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_1^5 (z-3)^2 \mathrm{d}z$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_a^b (6x^8 - 12x^2 + 1)\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x^2}\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_1^3 (t-2)^6 \mathrm{d}t$

   (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

8. Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie diese gegebenfalls:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x) \cdot e^{-x}\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

9. Entwickeln Sie mittels partieller Integration eine allgemeine Lösung für
   $\displaystyle\int x^n \cos(x)\mathrm{d}x \ , \ n \in \mathbb{N}$.