Theoretische Chemie
Prof. Dr. Wolfgang Eisfeld

Übungen zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Gegeben sei die Funktion einer reellen Variablen

$$f(x) = \sin(x) \,.$$

   (a) Entwickeln Sie $f(x)$ in einer Taylor-Reihe $T_n(x)$ um $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bis zur n-ten Ordnung.

   (b) Bestimmen Sie den Näherungswert für das Integral $\int f(x)\mathrm{d}x$ über die Taylor-Reihe zweiten Grades $T_2(x)$.

   (c) Lösen Sie das Integral aus b) exakt (analytisch).

2. Nutzen Sie die Taylor-Entwicklung, um das Verhalten der Funktion f mit
$f(x) = 1 - e^{\alpha x^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \; x \in \mathbb{R})$,
um $x_0 = 0$ zu charakterisieren. Liegt bei x_0 ein lokales Maximum oder Minimum der Funktion vor?

3. Gegeben ist die Funktion einer reellen Variablen

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - e^{-x}\right) .$$

   Bestimmen Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ auf zwei verschiedenen Wegen:

   (a) durch Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hospital, und

   (b) mit Hilfe der Standard-Taylor-Reihe für e^z mit $z = -x$.
   (**Hinweis:** Es genügen die ersten, führenden Terme der Reihe.)

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit einer geeigneten Methode.

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - x - 1}{e^x - 1}$.

5. Gegeben ist die Funktion einer reellen Variablen

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

   (b) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten (Pole, Verhalten für $|x| \to \infty$) von $f(x)$.

Hausaufgaben:

6. Charakterisieren sie die Funktion $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-x}$, indem Sie
   (a) die Nullstellen bestimmen,
   (b) die stationären Punkte ($P_s = (x_s, f(x_s))$ und ihren jeweiligen Typ (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) bestimmen,
   (c) die Funktion in einer Taylor-Reihe bis zur dritten Ordnung um den Punkt $x = 1$ entwickeln,
   (d) die stationären Punkte ihrer Ableitung $\frac{d}{dx}f(x)$ bestimmen
   (e) das asymptotische Verhalten (Verhalten für $|x| \to \infty$) der Funktion untersuchen
   (f) und die Funktion skizzieren.

Rechenaufgaben:

7. Die Stoffmenge n eines idealen Gases $\left(pV = nRT,\ R = 8,3144598\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2\text{ mol K}}\right)$ nimmt bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_1 das Volumen V_1 ein. Die Probe wird nun auf die Temperatur T_2 erhitzt und einem Druck von p_2 ausgesetzt. Welches Volumen V_2 hat es jetzt?

8. Vereinfachen Sie:
   (a) $\sqrt{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}}}$
   (b) $6^{-0.5} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$
   (c) $\frac{-3u^2v^{-6}w^{-4}}{-12v^8w^7u^{-3}v^{-2}}$
   (d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{-3}$
   (e) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$
   (f) $\sqrt[5]{49 \cdot \sqrt{7}}$

Lösungen von Zettel 10:

7. Die Chemikerin hat die Zahl 5 genommen.

8. Er hatte 28 Schüler.

9. Die Seite eines Quadrates mit einem Flächeninhalt von einem preußischen Morgen ist 50 m lang.

10. (a) $\mathbb{L} = \{3\}$
    (b) $\mathbb{L} = \{\}$
    (c) $\mathbb{L} = \{10\}$
    (d) $\mathbb{L} = \{5\}$
    (e) $\mathbb{L} = \{0\}$
    (f) $\mathbb{L} = \{-5; -2; 2; 5\}$