Theoretische Chemie
Prof. Dr. Wolfgang Eisfeld

Blatt 9

Übungen zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Ist die Funktion f mit
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
stetig ergänzbar an der Stelle $x_0 = 1$? Hinweis: Berechnen Sie den rechts- und linksseitigen Grenzwert von f an der Stelle x_0.

2. Gegeben sei die reelle Funktion f mit
$$f(x) = |x|\,.$$
   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ und überprüfen Sie, ob f in $\mathcal{D}(f)$ überall stetig ist.

   (b) Skizzieren Sie die Funktion im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.

3. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{\pi}\arctan\left\{\cos\left(\frac{3n-5}{n^2-4n+9}\right) + \sin^2\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+3}\right\}}$

   Hinweis: Man nutze aus, dass alle vorkommenden Funktionen stetig sind.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\sin^2(\mathrm{i}x) - \frac{1}{4}\,e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

   (a) Ermitteln Sie den Wertebereich von f.

   (b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f und bestimmen Sie ihren Definitions- und Wertebereich.

Hausaufgaben:

5. Gegeben ist die reelle Funktion g mit

$$g(x) = \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$$

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(g)$.

   (b) Ist g an den Definitionslücken stetig ergänzbar?

   (c) Skizzieren Sie g im Bereich von $[-2, 2]$.

6. Gegeben sei die reelle Funktion f durch

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2}$$

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ und begründen Sie, warum dieser so gilt.

   (b) Überprüfen Sie, ob f in $\mathcal{D}(f)$ überall stetig ist. Dazu dürfen Sie nutzen, dass x^2, $\sqrt{x}$ und $4 - x$ stetige Funktionen sind.

   (c) Skizzieren Sie die Funktion im Bereich $[-3, 3]$.

Rechenaufgaben:

7. Berechnen Sie für einen Kreis mit einem Umfang von 14 π cm den Radius, den Durchmesser und den Flächeninhalt.

8. Drücken Sie den Term $\dfrac{\tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$ nur in Abhängigkeit von $\sin(\alpha)$ aus.

9. Drücken Sie den Term $1 + \tan^2(\alpha)$ nur in Abhängigkeit von $\cos(\alpha)$ aus.

10. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Additionssätze und der Funktionswerte für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ aus Kapitel 6 des Skripts.
    $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ $\quad$ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$
    $\cos(\alpha + \beta)\sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta)\cos(\beta)$ $\quad$ $\cos(\alpha - \beta)\sin(\beta) - \sin(\alpha - \beta)\cos(\beta)$

Lösungen von Zettel 7:

6. (a) Alle reellen Zahlen größer als $-\frac{9}{2}$ kommen infrage.

   (b) Alle reellen Zahlen kleiner als -12 kommen infrage.

   (c) Alle reellen Zahlen kleiner 8 kommen infrage.

7. $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x > 5\}$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x < 10\}$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\}$
   $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$ $\quad$ $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{x | x \leq \frac{-1}{2} - \frac{-1}{6}\sqrt{33} \vee x \geq \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33}\}$
   $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{\ \}$