

Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Berechnen Sie die Summe aller Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ ($z \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$).

2. Gegeben sei die Reihe $S(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\alpha}$.

- (a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?
(**Hinweis:** Verwenden Sie das Quotientenkriterium.)
- (b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $S(\alpha)$.

3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für $n \geq 0$ folgendes gilt:

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

4. Drücken Sie $\sin(3\phi)$ durch eine Summe von Produkten $\sin \phi$ und $\cos \phi$ aus.

5. Zeigen Sie, dass gilt: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

6. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade?

$$f(\alpha) = |\alpha|; \quad f(\beta) = \beta^4 + 3\beta^2; \quad f(\gamma) = \gamma/(1 + \gamma^2);$$
$$f(\delta) = \delta^2/(\delta^3 + 2\delta); \quad f(\xi) = \sin(\xi); \quad f(\zeta) = \cos(\zeta).$$

Hausaufgaben:

7. Beweisen Sie mithilfe von vollständiger Induktion, dass für $0 < n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^n} (2^{n+1} - n - 2)$$

8. Beweisen Sie: $\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)$

9. Zeigen Sie: $[n! + (n+1)!](n+1) = (n+2)!$

Rechenaufgaben:

10. Ein 0,1 mm dickes Blatt Papier wird mehrmals hintereinander gefaltet. Es liegen dann nach 1-, 2- 3-, ...maligem Falten 2,4,8, ... Papierschichten übereinander.
- (a) Wie dick ist das gefaltete Papier nach achtmaligem Falten?
- (b) Nehmen Sie an, man könnte das Falten beliebig oft wiederholen. Nach dem wievielten Falten beträgt die Dicke des gefalteten Papiers erstmals mindestens 10,24 cm?
11. Schreiben Sie die folgenden Logarithmen als Summen oder Produkte möglichst einfacher Logarithmen $\log_a(x)$, also ohne Produkte, Divisionen, Summen, Differenzen oder Potenzen im Argument:
- (a) $\log_{10}(abc)$
- (b) $\log_a(x^3)$
- (c) $\log_a(a^2bc)$
- (d) $\log_{10}\left(\frac{3a}{10b}\right)$
- (e) $\log_a\left(\sqrt{u^3vw^5}\right)$.

Lösungen von Zettel 6:

8. 120 Mitglieder sind Jugendliche.
9. Er hätte 300 Euro bezahlen müssen.
10. Die Miete ist um 14 Prozent erhöht worden.
11. $\frac{5e}{5e+f} \quad \frac{x}{3} \quad (x \neq 0; z \neq -y) \quad \frac{r+s}{r-s} \quad (r \neq s; r \neq -s)$
 $\frac{3}{x-2} \quad (x \neq 2) \quad \frac{vw^2}{1+u} \quad (u \neq 0; u \neq -1)$
 $\frac{1}{3e} \cdot \frac{f}{3} \quad (e \neq -f; e \neq 0) \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{a+b} \quad (a \neq -b; c \neq -d)$
 $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$