Theoretische Chemie
Prof. Dr. Wolfgang Eisfeld

Übungen zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Gegeben sei eine Folge (a_n) mit der Eigenschaft
$$\frac{1}{n} \leq |a_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}\,, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) einen Grenzwert besitzt, und bestimmen Sie diesen.
   (b) Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ aussagen?
2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen über reelle Folgen:
   (a) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier divergenter Folgen sind ebenfalls divergent.
   (b) Konvergieren Summe (a_n+b_n) und Differenz (a_n-b_n) zweier Folgen, so konvergieren auch die Folgen (a_n) und (b_n) selbst.
   (c) Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergieren auch die Folgen $(\max\{a_n, b_n\})$ und $(\min\{a_n, b_n\})$.
   (d) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt: $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, so ist (a_n) eine Cauchy-Folge.
4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)}}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Hausaufgaben:

5. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 \cdot (2^n - 1)$$

6. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot e^{2k}; \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^k}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mathrm{i}k(\pi+2\mathrm{i})}.$$

Rechenaufgaben:

7. Ein Biologe fährt um 15.00 Uhr mit seinem Fahrrad von Münster über Telgte in das 24 km entfernte Warendorf, wo er um 17.00 Uhr ankommt. Dort ist um 15.15 Uhr ein Chemiker gestartet und um 16.15 Uhr im 16 km entfernten Telgte angekommen. Wann und wo haben sich beide getroffen?

8. Aus dem Buch „Die Wunder der Rechenkunst“ von Johann Christoph Schäfer (1857): Jemand wird gefragt, wie alt er und sein Bruder sei: dieser erwiderte: $\frac{5}{12}$ meines Alters beträgt gerade so viel, als $\frac{2}{3}$ von dem Alter meines Bruders, und ich bin im Ganzen 9 Jahre älter als mein Bruder. Wie alt war jeder von beiden?

9. Berechnen Sie das Volumen, die Mantelfläche und den Oberflächeninhalt eines Zylindes, wenn der Radius der Grundfläche 20 cm und die Höhe des Zylindes 55 cm beträgt. Geben Sie das Ergebnis in $\pi \cdot \mathrm{cm}^3$ beziehungsweise $\pi \cdot \mathrm{cm}^2$ an.

10. Vereinfachen Sie.
   (a) $\frac{3}{g^5-h^5} + \frac{3}{h^5+g^5}$
   (b) $\frac{(x-y)^7}{x^2-y^2} - \frac{(x-y)^6}{x+y}$
   (c) $\frac{(a-b)^4}{(a^3-a^2b)^6}$
   (d) $\frac{x^2y^{-5}}{a^{-3}b^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}b}{x^{-2}y^{-7}}$

11. Entfernen Sie die Wurzeln aus dem Nenner.
   (a) $\frac{7a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
   (b) $\frac{1}{1-\sqrt{1-g}}$
   (c) $\frac{2k}{\sqrt{2k}+4\sqrt{3m}}$
   (d) $\frac{2\sqrt{y}-3\sqrt{z}}{2\sqrt{y}+3\sqrt{z}}$

Lösungen von Zettel 4:

7. Der Preis erhöhte sich um 5 Prozent.

8. (a) Das neue Viereck hat einen Flächeninhalt von 49 cm^2.
   (b) Der Flächeninhalt wird um 96 Prozent größer.

9. Der erste hatte $\frac{8}{45}$ Rubel, der zweite $\frac{4}{45}$ Rubel.

10. a) $\frac{9by^4}{ax^6}$ b) $\frac{a^6b^4}{c^{42}}$ c) 0 d) $2\sqrt[3]{3}$ e) 4 f) $(2a-3b) \cdot \sqrt[3]{2a-3b}$
g) $2(a-b)\sqrt{a-b}$ h) $z^{\frac{5}{26}}$