Theoretische Chemie
Prof. Dr. Wolfgang Eisfeld

Übungen zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Beweisen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition ohne Nutzung der Grenzwertsätze (indem Sie explizit ein $N = N(\varepsilon)$ angeben):
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

2. Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Zahlenfolgen $\{a_n\}$ $(1 \leq n < \infty)$ auf Konvergenz und bestimmen Sie Infimum (größte untere Schranke), Supremum (kleinste obere Schranke) und Grenzwerte, falls diese existieren:
$a_n = \dfrac{n}{n+1}$; $\quad a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$; $\quad a_n = n^2$; $\quad a_n = e^{-\frac{1}{3}n\pi \mathrm{i}}$

3. Beweisen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition, dass gilt $(a \in \mathbb{R})$:
   (a) $a^n \to \infty$ für $n \to \infty$ wenn $a > 1$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ wenn $|a| < 1$

Hausaufgaben:

4. Bestimmen Sie, falls konvergent, die Grenzwerte der Zahlenfolgen $\{a_n\}$ mit:
   (a) $a_n = \sqrt{4n^2 - 3n} - \sqrt{4\,(n-3)^2}$
   (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{2^{2n+3}} + \sqrt{81^{\frac{n}{2}}}}{8 \cdot (2^n + 4 \cdot 4^{n-1})}$
   Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ wenn $|a| < 1$
   (c) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n - 7 + \sqrt{n^6 - 2n}}{n + \sqrt{16n^6 - n^3}}$

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition ohne Nutzung der Grenzwertsätze (indem Sie explizit ein $N = N(\varepsilon)$ angeben):
$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{k} = 1$

6. Gegeben ist die Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi \cdot n}{3}}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.
   (a) Skizzieren Sie die ersten vier Folgenglieder a_0, a_1, a_2, a_3 in der komplexen Zahlenebene.
   (b) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Rechenaufgaben:

7. Der Preis für eine Stereoanlange wurde von 540 Euro auf 567 Euro erhöht. Um wie viel Prozent erhöhte sich der Preis?

8. Bei einem Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm wird jede Seite um 40 Prozent verlängert.

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des neuen Vierecks.

   (b) Um wie viel Prozent wird der Flächeninhalt größer?

9. Aus Leonard Eulers „Vollständiger Anleitung zur Algebra“ :
   Zwei Personen sind $\frac{2}{9}$ Rubel schuldig, nun hat zwar jeder Geld, doch nicht so viel, dass er diese gemeinschaftliche Schuld bezahlen könnte; darum sagt der erste zu dem anderen: „Gibst du mir $\frac{2}{4}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld sogleich allein bezahlen.“ Der andere antwortet dagegen: „Gibst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so kann ich die Schuld allein bezahlen.“
   Wie viel Geld hat jeder gehabt?

10. Vereinfachen Sie.

    (a) $\dfrac{\frac{3x^{-2}y}{2a^2b}}{\frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}}$

    (b) $\dfrac{\left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^{-7}}\right)^{-4}}{\left(\frac{ab^{-2}}{c^7}\right)^{-2}}$

    (c) $\dfrac{x^{s-1}}{x^{1+s}} - \dfrac{1}{x^2}$, wobei gilt $x \neq 0$

    (d) $\sqrt[5]{32 \cdot \sqrt[3]{243}}$

    (e) $\sqrt[3]{\sqrt{4096}}$

    (f) $\sqrt[3]{(4a^2 - 12ab + 9b^2) \cdot (2a - 3b)^2}$

    (g) $\sqrt[4]{16 \cdot (a - b)^5}$

    (h) $\dfrac{z^{\frac{6}{13}}}{z^{\frac{7}{26}}}$

Lösungen von Zettel 3:

9. Der Stapel ist 3360000 km hoch.

10. Marina hat die Zahl 0 addiert.

11. Es waren 4 Männer und 16 Frauen.

12. a) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\left(b^t + b^h\right)(s-r)$
    d) 1 e) $\frac{xy}{ab}$ f) $a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$ g) 2 h) $\frac{a^{48}}{b^{82}3^7}$