Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. Veranschaulichen Sie für $z = (-3 + 4i)$ die Lage der folgenden Punkte in der komplexen Zahlenebene: z , iz , i^2z , i^3z , z^2 , z^* und $|z|$.
2. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{12} + 2i$ und $z_2 = \sqrt{12} - 2i$.
  - (a) Berechnen Sie $z_3 = z_1 + z_2$ und $z_4 = z_1/z_2$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $z = x + iy$.
  - (b) Berechnen Sie z_1^4 und z_2^4 und vergleichen Sie die Ergebnisse.
  - (c) Geben Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 in der Polardarstellung $z = re^{i\phi}$ an.
Benutzen Sie folgende Identitäten:
$$\arctan 0 = 0 \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$
3. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichungen $z^3 = 1$ und $z^3 = -1$. Skizzieren Sie die Lösungen. Bilden die dritten komplexen Einheitswurzeln eine Gruppe bezüglich der Multiplikation?

Hausaufgaben:

4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{M} = \{e^{i\chi}\}$ mit $\chi \in [0, 2\pi)$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet.
5. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$.
  - a) $\frac{1}{2i} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$
  - b) $\frac{2}{(i+1)(i-1)} \cdot \frac{i+2}{i-3}$
  - c) $e^{-\frac{1}{i+1} \frac{\pi}{2}}$
6. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ und $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1)$.
  - (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_2 .
  - (b) Bestimmen Sie die Polardarstellung von z_1 und z_2 sowie $z_1 \cdot z_2$.
  - (c) Wie lauten alle Lösungen $\omega \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\omega^3 \cdot z_1 = z_2$? Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten an. Benutzen Sie die Identitäten in der folgenden Tabelle:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Außerdem gilt:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

Rechenaufgaben:

7. (a) Wählen Sie zwei Zahlen, deren Summe 10 ist. Multiplizieren Sie die beiden Zahlen. Wie sind die beiden Zahlen zu wählen, damit ihr Produkt 16 ist?
  - (b) Bei welchen beiden aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist das Produkt um 41 größer als die Summe?
  - (c) Addiert man eine Zahl zu ihrem Kehrwert, so erhält man das 50fache der Zahl. Bestimmen Sie alle Zahlen, für die dies gilt.
8. Der Umfang des Rechtecks beträgt 50 cm. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks beträgt 154 cm². Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks.

9. Griechisches Epigramm:

Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eseleins Mutter; und die Eselin seufzte sehr; da sagte das Söhnlein: Mutter, was klagst du wie ein jammerndes Mägdlein? Gib ein Pfund mir ab, so trag ich doppelte Bürde; nimmst du es aber von mir, gleich viel dann haben wir beide.

Rechne mir aus, wenn du kannst, mein Bester, wieviel sie getragen.

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(a) $\frac{1}{5}x^2 = 2x - 5$

(b) $(x^2 - x - 1)x - 3x^2(1 + x - x^2) = (x^2 - x - 1)$

(c) $\frac{9}{x-8} = x$

(d) $\frac{2x+1}{3} + 102x + 1 = 4$

(e) $\sqrt{x-1} = x-1$

(f) $3x - 4 + \sqrt{2x} = 4$

(g) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(h) $(x^2 - 16)^2 - 6(16 - x^2) = 16$

Lösungen von Zettel 1:

7. Sie bekommt zwei Apfelsinen mehr, wenn sie Sorte B statt Sorte A kauft.
8. a) Das zweite Auto fuhr mit $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Der Treffpunkt ist 180 km von Nürnberg und 320 km von Hannover entfernt.
9. Die Länge beträgt 6 Handbreiten, die Breite 4 Handbreiten.
10. a) $14x^5y^8 + 2x^8y^5$ b) 0   c) $41ay - 21az - 2bx + 18by - 2cx$
11. a) $\mathbb{L} = \{\frac{16}{7}\}$ b) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ c) $\mathbb{L} = \{-1\}$ d) $\mathbb{L} = \{g | g \in \mathbb{R} \wedge g > 1\}$ e)
 $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1\}$