

Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende der Chemie und Biochemie

1. (a) Geben Sie die Bedingungen an, aufgrund der die Permutationen einer n -elementigen Menge eine nicht-abelsche Gruppe bilden.
- (b) Geben Sie die Bedingungen an, aufgrund der die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} einen Ring bezüglich der Addition und der Multiplikation bildet.
- (c) Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} einen Körper bezüglich der Addition und der Multiplikation bildet. Verwenden Sie hierzu die Eigenschaften der ganzen Zahlen aus Aufgabe 1b.
2. Zeigen Sie, dass ...
 - (a) ... wahr und falsch mit der Verknüpfung " \wedge " keine Gruppe bilden.
 - (b) ... wahr und falsch mit der Verknüpfung " \Leftrightarrow " eine Gruppe bilden.
 Die Aussagetafel lautet:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

3. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) &= a_n - a_0 & \text{b) } \sum_{j=1}^{2n} a_j - \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} &= \sum_{j=1}^n a_{2j} \\
 \text{c) } \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m a k^2 j &= a \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{m(m+1)}{2}
 \end{aligned}$$

4. Übersetzen Sie folgende Aussage in einen deutschen Satz, wobei \mathbb{M} die Menge aller Mäuse und \mathbb{E} die Menge aller Elefanten ist und die hier verwendeten Prädikate definiert sind als P_{-1} = "... ist orange.", Q_{-1} = "... ist blau." und $R_{-1,2}$ = "... und ... sind Freunde." " $\forall(x \in \mathbb{M} \mid Px) \exists(y \in \mathbb{E} \mid Qy) : Rxy$."
5. Drücken Sie folgende Aussage in Prädikatenlogik aus:
 "Alle Bäume sind Pflanzen und alle Pflanzen betreiben Photosynthese, das heißt alle Bäume betreiben Photosynthese."
6. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke möglichst weit, beseitigen Sie insbesondere die Wurzelausdrücke im Nenner:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } a(n) &= \frac{n+2}{\sqrt{5n^2+7n-1} - \sqrt{5n^2+5n-5}} \\
 \text{(b) } a(n) &= \frac{2n^2-4n}{2n^3-8n^2+2n+12} \\
 \text{(c) } a(n) &= \frac{n+2}{\sqrt{n^3-3n+2n^2-7} - \sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

Hausaufgaben:

4. (a) Geben Sie die Bedingungen an, aufgrund der die Menge der ganzen Zahlen eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition bildet.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen keine Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet.
5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke und beseitigen Sie gegebenenfalls die Wurzelausdrücke im Nenner (mit $n > 0$):

$$(a) w(n) = \frac{(n^2 - n - 12)[n \cdot (n + 3) - 4]}{(n^2 - 16)(n + 3)}$$

$$(b) x(n) = \frac{n^3 - 4n^2 + n + 6}{(n - 2)(n - 3)}$$

$$(c) y(n) = \frac{\sqrt{2} \cdot n^3}{\sqrt{8n^4}(\sqrt{5n} - \sqrt{3n})}$$

6. Zeigen Sie, dass gilt:

$$-\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

Rechenaufgaben:

7. Eine Chemikerin kauft auf dem Markt ein. Sie hat 10 Euro bei sich. Sie kauft 3 kg Kartoffeln, das Kilogramm zu 65 Cent und 11 Äpfel zu 35 Cent das Stück. Außerdem möchte sie für das restliche Geld noch Apfelsinen kaufen. Apfelsinen der Sorte A kosten 36 Cent pro Stück, Apfelsinen der Sorte B kosten 32 Cent pro Stück. Wie Viele Apfelsinen bekommt die Chemikerin mehr, wenn sie statt Apfelsinen der Sorte A nur solche der Sorte B kauft?
8. Hannover und Nürnberg sind 500 km voneinander entfernt. Von Hannover fährt ein Auto in Richtung Nürnberg mit der Geschwindigkeit $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zur gleichen Zeit fährt von Nürnberg aus ein Auto dem ersten Auto entgegen. Beide Autos treffen sich nach 4 Stunden.
- (a) Mit welcher Geschwindigkeit ist das zweite Auto gefahren?
- (b) Wie weit ist der Treffpunkt von Hannover bzw. von Nürnberg entfernt?
9. Viertausend Jahre alt ist folgende Aufgabe aus Babylon:
Ein Viertel der Breite und Länge zusammen sind 7 Handbreiten. Länge und Breite zusammen sind 10 Handbreiten. Berechne Länge und Breite.
10. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
- (a) $\frac{4}{7}x^8y^5 : (-\frac{2}{21}) + \frac{10}{3}x^5y^8 : \frac{5}{9} - \frac{12}{5}x^4y^5x^4 : (-\frac{3}{10}) - \frac{2}{3}x^5 \cdot \frac{8}{11}y^8 : \frac{-4}{99}$
- (b) $\frac{6}{7}r^3s^2 \cdot (-\frac{7}{3}r) - \frac{4}{5}r^4s^3 : (\frac{1}{5}s) + \frac{1}{3}rs \cdot (9r^3s) - 2\frac{2}{5}r^5s^3 : (-\frac{4}{5}rs)$
- (c) $7(a(x + 5y - 3z)) + 2x(a - (b + c)) + (6y(a + 3b - 4z) - 9ax + 24zy)$
11. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$(a) 35 + 2x - 24 - 4x - 11 + 3x + 18 - 9x - 1 + x - 1 = 0$$

$$(b) (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 4)^2 + (x + 3)^2 - 8x - 20$$

$$(c) (2z + 5)^2 - (2z + 1)(2z - 1) = (2z - 1)^2 - (z + 1)(z - 1) - 3z^2$$

$$(d) 3g + \frac{7}{9} > \frac{31}{9} + \frac{1}{3}g$$

$$(e) (8x + 8) \left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right) \geq (x + 1) \left(4\frac{4}{5}x + 1\right)$$