éléments, carrées et multipliées par les masses, donnent une somme minima. »

D'après un théorème bien connu, il est évident que le point, ainsi défini, est le point de la surface qui est à distance minima du centre de gravité ordinaire. Il se trouvera donc, en général, au pied d'une perpendiculaire abaissée du centre de gravité ordinaire sur la surface; et, par conséquent, si l'on suspend la surface à un fil passant par ce point, le fil sera normal à la surface. Cette définition donne toujours un centre de gravité superficiel; il peut en donner plusieurs et même un nombre infini. Dans un ellipsoïde homogène à trois axes, il y a deux de ces centres (aux bouts de l'axe le plus petit); dans un sphéroïde homogène, s'il est aplati, il y en a aussi deux (aux pôles); s'il est allongé, tous les points de l'équateur sont des centres. Dans une sphère homogène, tous ses points sont des centres de gravité superficiels. La définition de M. Collignon donnerait, je crois, les mêmes résultats. F.-S. Siacci (Naples).

49. (Dellac). — La réponse *arithmétique* (¹) à cette question découle des théorèmes suivants, dont la démonstration n'offre pas de difficultés. Désignons par le symbole $\boxed{m}$ le minimum absolu des multiplications successives à effectuer pour atteindre a^m, en partant de a, ... et soient i, i', n, p, q, ..., α, β, γ, ... des entiers positifs.

Théorème I. — 1° Si $m = 2^i$, on a $\boxed{m} = i$;

2° Si $m = 2^i + 2^{i'}$ ($i' \gtreqless 0$ et $\lesseqgtr i$), on a $\boxed{m} = i + 1$;

3° Si $m = 2^i + 2^{i'} + 1$, on a $\boxed{m} = i + 2$; c'est le cas des nombres 11, 13, 19, 37, 41, 67, 73, 97, 131, 137, 197, pour ne parler que des nombres premiers < 199.

Théorème II. — Tous les nombres autres que ceux désignés dans le théorème I ont leur minimum absolu plus grand que $i + 2$, ou au moins égal à $i + 2$; c'est donc une limite *inférieure*.

Théorème III. — m étant décomposé en ses facteurs premiers

(¹) Quant à une formule purement *algébrique*, l'intervention nécessaire des nombres premiers la rend très probablement aussi impossible à trouver que celle qui donnerait *a priori* le nombre exact de ceux-ci compris entre deux limites fixes.

$n, p, q, \ldots$, si $m = n^\alpha p^\beta q^\gamma \ldots$, on a

$$\boxed{m} \overset{=}{<} \alpha \boxed{n} + \beta \boxed{p} + \gamma \boxed{q} + \ldots.$$

Cette somme est une limite *supérieure*.

Théorème IV. — Que m soit premier ou non, on a toujours 1° $\boxed{m} \overset{=}{<} \boxed{m-1} + 1$; 2° $\boxed{m} \overset{=}{<} \boxed{m-2} + 1$.

Le théorème IV s'applique nécessairement aux nombres premiers. D'ailleurs, si m est premier, $m - 1$ ne l'est pas, et souvent $m - 2$ ne l'est pas non plus; le théorème III retrouve ainsi son application sur ceux-ci. L'application du théorème III est immédiate, si tous les facteurs premiers que l'on utilise se trouvent dans la *Table* ci-après, où l'on a calculé les minima absolus pour tous les nombres premiers compris entre 2 et 200. Quant à ceux de ces facteurs qui excèdent les limites de la Table, on opère à leur égard, à l'aide du théorème IV, comme on l'avait fait pour m (premier), et ainsi de suite, de proche en proche, jusqu'à ce que tous soient rentrés dans la Table, qu'on pourrait d'ailleurs étendre. Si les limites supérieure et inférieure ainsi trouvées coïncident, on est certain de posséder le minimum absolu que l'on cherche. Pour les autres, on a des contrôles plus laborieux, mais exacts. Le plus souvent la valeur $\boxed{m}$ fournie par la relation (1°) du théorème IV, $\boxed{m} \overset{=}{<} \boxed{m-1} + 1$, est plus approchée de la vérité que celles qui résultent de la relation (2°). Parfois la plus approchée est fournie par la relation $\boxed{m} \overset{=}{<} \boxed{m-3} + 2$; c'est le cas pour $m = 131$. On peut appliquer le résultat obtenu en écrivant les séries ou *échelles génératrices*, pour lesquelles la progression $1, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^i$ est la plus rapide pour *s'avancer* vers m, mais non pas toujours pour *l'atteindre*. Ces suites doivent satisfaire d'ailleurs aux exigences normales du sujet, à savoir (puisqu'il s'agit *d'exposants*) qu'un quelconque de leurs termes ne peut être que le double du précédent, ou bien la somme de celui-ci et de l'un de ses antécédents; d'où il suit que 1 et 2 sont toujours les deux premiers termes de chaque suite génératrice.

Exemple. — Soit $m = 19177 = 127 \times 151$. La Table donne

$\boxed{127} = 10$, $\boxed{151} = 10$, d'où, par le théorème III,

$$\boxed{m} \overset{=}{<} 10 + 10 \overset{=}{<} 20.$$

Par le théorème IV, on trouve

$$19177 = 19176 + 1 = 2^3.3.799 + 1,$$

puis $$799 = 798 + 1 = 2.3.7.19 + 1,$$

d'où, par la Table, $$\boxed{799} \overset{=}{<} 1 + 2 + 4 + 6 + 1 = 14,$$

et, par conséquent, $$\boxed{19177} \overset{=}{<} 3 + 2 + 14 + 1 = 20.$$

La décomposition $19177 = 19175 + 2$ donne à son tour

$$19177 = 5^2.13.59 + 2,$$

d'où $$\boxed{19177} \overset{=}{<} 6 + 5 + 8 + 1 = 20,$$

comme ci-dessus. Enfin, comme $19177 > 2^{14}$ et $< 2^{15}$, le théorème II indique *a priori* que $\boxed{19177} \overset{=}{>} 16$.

La décomposition $19177 = 19176 + 1$ correspond à la suite génératrice

$$1, 2, \quad 4, 6, \quad 12, 18, 30, 42, \quad 84, 168, 336, 672, 756, 798, 799,$$
$$1598, 3196, 6392, 12784, 19176, 19177,$$

qui possède vingt échelons normaux et indique comment les vingt multiplications successives doivent être conduites pour arriver de a à a^{19177}.

Table des minima absolus des nombres premiers, de 2 *à* 199.

Minima.	Nombres correspondants.	Minima.	Nombres correspondants.
1...	2	7	29, 31, 37, 41, 43
2...	3	8	47, 53, 59, 61, 67, 73, 83, 97
3...	5	9	71, 79, 89, 101, 103, 109, 113, 131, 137, 193
4...	7	10	107, 127, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 181
5...	11, 13, 17	11	179, 191, 199, ..., etc.
6...	19, 23		

E. DE JONQUIÈRES.

68. (CH. BIOCHE.) — Le nombre des circuits que l'on peut former avec toutes les pièces d'un jeu de dominos (les *doubles* non compris), en se conformant à la règle du jeu, est de