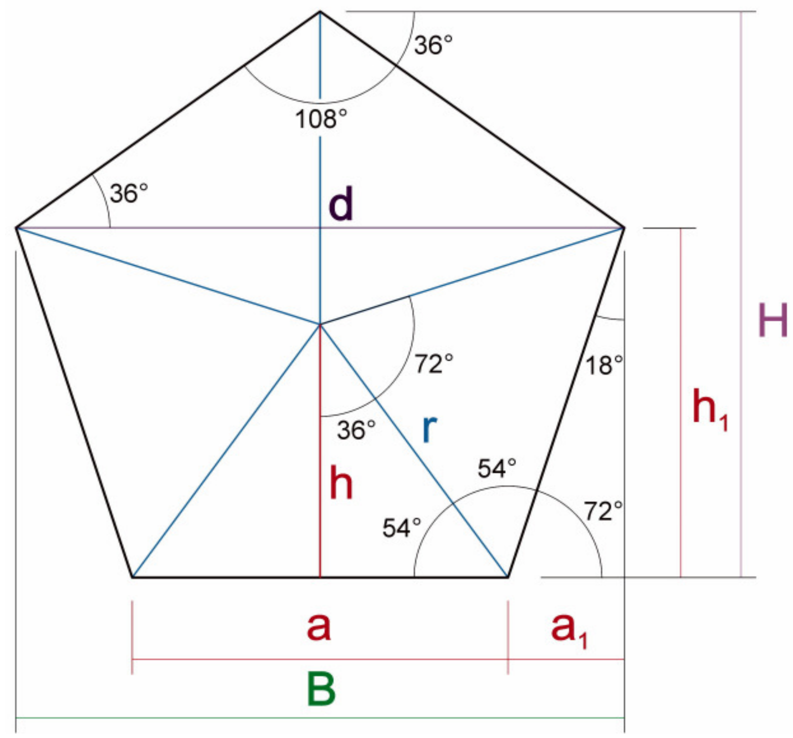
Der Pentagondodekaeder

Regelmässiger geometrischer Körper, begrenzt von 12 gleichseitigen Pentagons.

Details der Seitenfläche : Pentagon mit Seitenlänge a



Berechnung des Radius **r** vom Umkreis des Pentagon

$$\sin 36° = \frac{½ \cdot a}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$$

Berechnung der Höhe **h** eines Teildreiecks

$$\cos 36° = \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°} \cdot \cos 36° = \frac{a \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36°}$$

oder $\quad \operatorname{tg} 54° = \frac{h}{½ \cdot a} \quad \Rightarrow \quad h = ½ \cdot a \cdot \operatorname{tg} 54°$

Berechnung der Höhe **H** (senkrechte Distanz Mitte Basisseite zur gegenüberliegenden Ecke)

$$H = h + r \quad \Rightarrow \quad H = \frac{a \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36°} + \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$$

$$H = \frac{a\,(1 + \cos 36°)}{2 \cdot \sin 36°} = k \cdot a$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{1 + \cos 36°}{2 \cdot \sin 36°} \qquad k = 1{,}538841768587630$$

Berechnung der Höhe h_1 (senkrechte Distanz der seitlichen Ecken zu Basisseite)

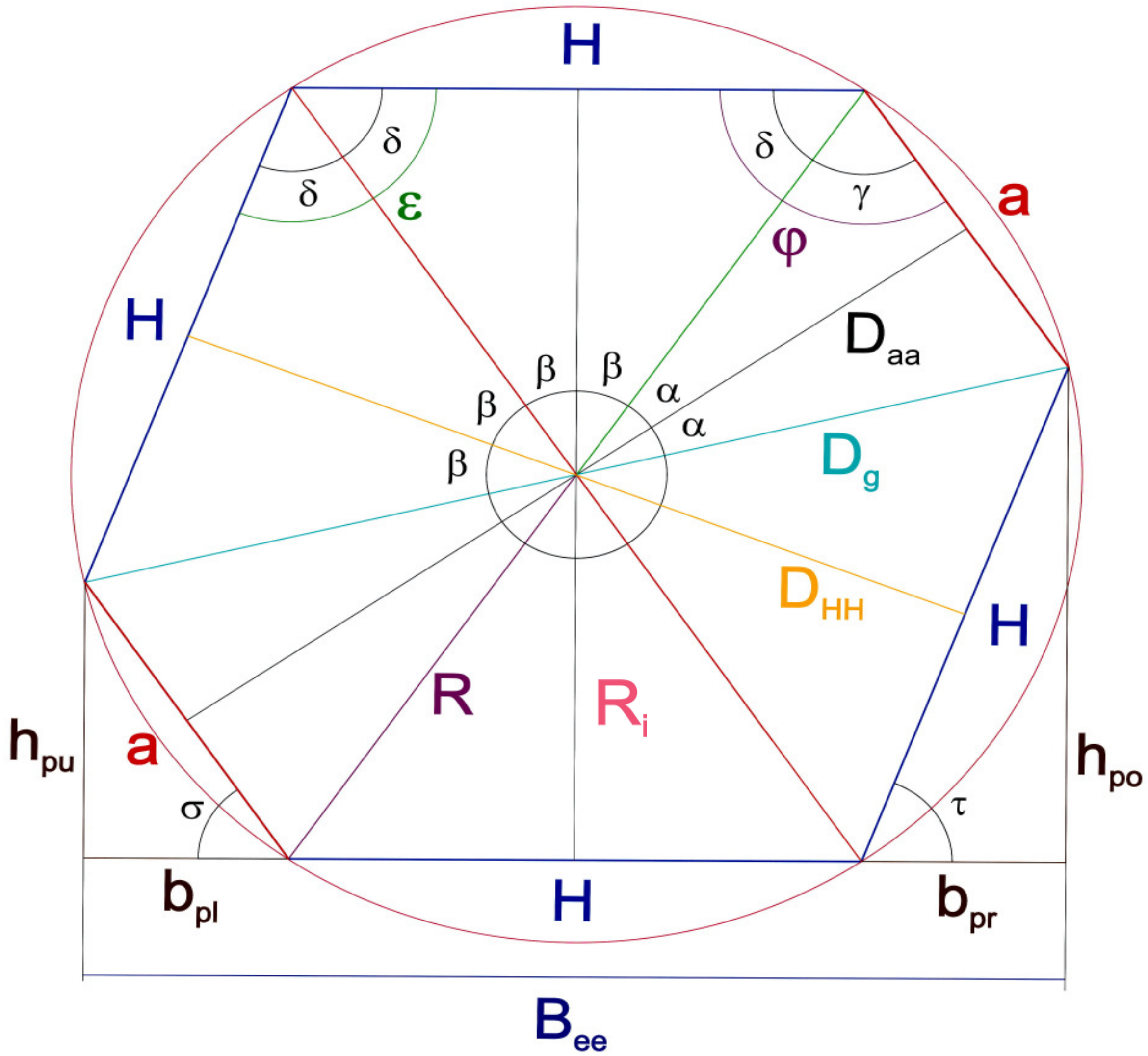
$$\sin 72° = \frac{h_1}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_1 = a \cdot \sin 72°}$$

Berechnung der Beite B des Pentagons, Distanz zwischen 2 Ecken (Diagonale)

$$\cos 36° = \frac{½ \cdot d}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = B = 2 \cdot a \cdot \cos 36°}$$

Der Dodekaeder ist ein regelmäßiger Körper. Seine 20 Eckpunkte liegen alle gleich weit vom Zentrum entfernt. Diese Distanz entspricht dem Radius R der umhüllenden Kugel.

Es ergibt sich folgende Schnittfläche durch 2 gegenüberliegende Pentagonkanten a.



Berechnung der Winkel

$2 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta = 180°\quad \Longrightarrow \quad \alpha + 2 \cdot \beta = 90° \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\beta = 45° - ½ \cdot \alpha}$ (1)

$\sin \alpha = \dfrac{½ \cdot a}{R}$ und $\sin \beta = \dfrac{½ \cdot H}{R}$

$$\Longrightarrow \quad R = \frac{½ \cdot a}{\sin \alpha} = \frac{½ \cdot H}{\sin \beta}$$ Radius Umkreis

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{H} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \beta = \frac{H \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{k \cdot a \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\sin \beta = k \cdot \sin \alpha} \quad (2)$$

(1) in (2)

$$\sin (45° - ½ \cdot \alpha) = k \cdot \sin \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \sin (45° - ½ \cdot \alpha) = k \cdot \cos (90° - \alpha)$$

wegen $\cos 2\varphi = 1 - 2 \cdot \sin^2 \varphi$ erhält man :

$$\Longrightarrow \quad \sin (45° - ½ \cdot \alpha) = k \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 (45° - ½ \cdot \alpha))$$

$$\Longrightarrow \quad \sin (45° - ½ \cdot \alpha) = k - 2k \cdot \sin^2 (45° - ½ \cdot \alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad 2k \cdot \sin^2 (45° - ½ \cdot \alpha) + \sin (45° - ½ \cdot \alpha) - k = 0 \qquad (3)$$

(3) ist eine Gleichung 2^{ten} Grades von sin (45° - ½ · a)

$$\Longrightarrow \quad \rho = 1 - 4 \cdot 2k \cdot (-k) = 1 + 8k^2$$

$$\Longrightarrow \quad \sin (45° - ½ \cdot \alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8k^2}}{4k}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\sin (45° - ½ \cdot \alpha) = 0{,}563069753106006}$$

oder $= -0{,}887989449338913$

Lösung für den positiven Wert :

$$\sin(45° - ½ \cdot \alpha) = 0{,}563069753106006$$

$$45° - ½ \cdot \alpha = \arcsin(0{,}563069753106006)$$

$$45° - ½ \cdot \alpha = 34{,}2683586040841° \quad = \quad 34°16'\ 6{,}09''$$

$$\alpha = 90° - 2 \cdot 34{,}2683586040841°$$

$$\boxed{\alpha = 21{,}4632827918319° \quad = \quad 21°27'\ 47{,}81''}$$

$$\beta = 45° - ½ \cdot \alpha = 45° - ½ \cdot 21{,}4632827918319°$$

$$\boxed{\beta = 34{,}2683586040841° \quad = \quad 34°16'\ 6{,}09''}$$

$$\gamma = 90° - \alpha = 68{,}5367172081681° \quad = \quad 68°32'\ 12{,}18''$$

$$\delta = 90° - \beta = 55{,}7316413959159° \quad = \quad 55°43'\ 53{,}9''$$

Berechnung des Winkels zwischen einer Kante a und der Pentagonhöhe H

$$\boxed{\varphi = \delta + \gamma = 124{,}268358604084° \quad = \quad 124°16'\ 6{,}09''}$$

Berechnung des Winkels zwischen 2 Pentagonflächen mit gemeisamer Kante a

$$\boxed{\varepsilon = 2\delta = 111{,}463282791832° \quad = \quad 111°27'\ 47{,}81''}$$

Probe : $2 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta = 180°$ 180,000000000000000

Berechnung des Abstand von 2 gegenüberliegenden parallelen Pentagonflächen (D_{HH})

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{½ \cdot H}{½ \cdot D_{HH}} = \frac{k \cdot a}{D_{HH}}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{HH} = \frac{k \cdot a}{\operatorname{tg} \beta}}$$

Dies entspricht dem Durchmesser der Inkugel, die Tangent zu den Zentren der 12 Pentgonseiten des Dodekaeders ist.

$$\Rightarrow \boxed{R_i = \frac{k \cdot ½ \cdot a}{\operatorname{tg} \beta}}$$

Berechnung des Abstand von 2 gegenüberliegenden parallelen Kanten (D_{aa})

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot D_{aa}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{D_{aa}} = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

Berechnung des Abstand von 2 diametral gegenüberliegenden Ecken (D_g = Umkugeldurchmesser)

$$D_g = 2 \cdot R = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Berechnung der Höhe der 5 oberen Ecken zur Basisfläche (h_{po})

$$\tau = 180° - \varepsilon = 68{,}5367172081681\ ° = 68° 32'\ 12{,}18''$$

$$\sin \tau = \frac{h_{po}}{H} = \frac{h_{po}}{k \cdot a}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{po} = k \cdot a \cdot \sin \tau}$$

Berechnung der Höhe der 5 unteren Ecken zur Basisfläche (h_{pu})

$$\sigma = 180° - \varphi = 55{,}7316413959159\ ° = 55° 43'\ 53{,}9''$$

$$\sin \sigma = \frac{h_{pu}}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{pu} = a \cdot \sin \sigma}$$

Berechnung der Breite von Ecke unten zu gegenüberliegender Ecke oben

$$Bee = b_{pl} + H + B_{pr}$$

$$\cos \tau = \frac{b_{pr}}{H} = \frac{b_{pr}}{k \cdot a}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{pr} = k \cdot a \cdot \cos \tau}$$

$$\cos \sigma = \frac{b_{pl}}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{pl} = a \cdot \cos \sigma}$$

$$B_{ee} = b_{pl} + H + b_{pr}$$

$$B_{ee} = a \cdot \cos \sigma + k \cdot a + k \cdot a \cdot \cos \tau$$

$$B_{ee} = a \cdot (\cos \sigma + k + k \cdot \cos \tau)$$

$$B_{ee} = a \cdot (k + \cos \sigma + k \cdot \cos \tau)$$

Oberfläche des Pentagondodekaeders

Sie setzt sich aus 12 Pentagons zusammen, die aus je 5 gleichen Dreiecken bestehen, mit der Basis **a** und der Höhe **h**.

$$S = 12 \cdot 5 \cdot ½ \cdot a \cdot h$$

$$S = 30 \cdot a \cdot \frac{a \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36°}$$

$$S = \frac{15 \cdot \cos 36°}{\sin 36°} \cdot a^2$$

Volumen des Pentagondodekaeders

Es setzt sich aus 12 Pyramiden mit Pentagon als Basisfläche und der Höhe Ri .

$$V = \frac{12 \cdot 5 \cdot ½ \cdot a \cdot h \cdot Ri}{3}$$

$$V = 10 \cdot a \cdot \frac{a \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36°} \cdot \frac{k \cdot ½ \cdot a}{\text{tg } \beta}$$

$$V = \frac{5 \cdot k \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36° \cdot \text{tg } \beta} \cdot a^3$$

Zusammenfassung :

Flächen-Flächen-Winkel $\varepsilon = 111° 27' 47,81''$

Flächen-Kanten-Winkel $\varphi = 124° 16' 6,09''$

Umkugelradius $R = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot a}{\sin \alpha} = 1,36647525470785\ a$

Inkugelradius $R_i = \dfrac{k \cdot a}{\mathrm{tg}\ \beta} = 1,12926795958329\ a$

Oberflächeninhalt $S = \dfrac{15 \cos 36°}{\sin 36°} a^2 = 20,6457288070676\ a^2$

Volumen $V = \dfrac{5 \cdot k \cdot \cos 36°}{2 \cdot \sin 36° \cdot \mathrm{tg}\ \beta} \cdot a^3$

$V = 7,77152001468903 \cdot a^3$